Глава XV

Представление одного эндоморфизма

§ 1. Представления

Пусть k — коммутативное кольцо и E — модуль над k. Как обычно, мы обозначаем через $\mathrm{End}_k(E)$ кольцо k-эндоморфизмов E, т. е. кольцо k-линейных отображений E в себя.

Пусть R — некоторая k-алгебра (задаваемая кольцевым гомоморфизмом $k \to R$, который позволяет нам рассматривать R как k-модуль). Под *представлением* R в E понимают гомоморфизм k-алгебр $R \to \mathrm{End}_k(E)$, т. е. кольцевой гомоморфизм $\rho: R \to \mathrm{End}_k(E)$, для которого коммутативна следующая диаграмма:

$$\begin{tikzcd} R \arrow[rr] & & \mathrm{End}_k(E) \\ & k \arrow[ul] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

[Как обычно, мы рассматриваем $\mathrm{End}_k(E)$ как k-алгебру; если I обозначает тождественное отображение модуля E, то имеем гомоморфизм кольца k в $\mathrm{End}_k(E)$, задаваемый отображением $a \mapsto \alpha I$. Мы будем использовать I также для обозначения единичной матрицы, когда выбраны базисы. Что мы имеем в виду, всегда будет ясно из контекста.]

Мы встретимся в дальнейшем с несколькими примерами представлений для различных типов колец (и коммутативных, и некоммутативных). В этой главе все кольца будут коммутативными.

Заметим, что E можно рассматривать как $\mathrm{End}_k(E)$-модуль. Следовательно, E можно рассматривать как R-модуль, определив действие R на E следующим образом:

$$(x, v) \mapsto \rho(x) v,$$

где $x \in R$ и $v \in E$. Мы будем обычно писать xv вместо $\rho(x) v$.

Подгруппа F в E, такая, что $RF \subset F$, будет называться *инвариантным* подмодулем в E. (Она одновременно R-инвариантна и k-инвариантна.) Мы будем также говорить, что она инвариантна относительно данного представления.

Мы будем говорить, что представление *неприводимо*, или *просто*, если $E \neq 0$ и если единственными инвариантными подмодулями являются 0 и E. Неприводимым (или простым) называется в этом случае и сам модуль E.

Цель теории представлений состоит в том, чтобы описать структуру всех представлений различных интересных колец и классифицировать их неприводимые представления. В большинстве случаев мы будем брать в качестве k поле, которое может быть, а может и не быть алгебраически замкнутым. Трудности в доказательстве теорем о представлениях могут поэтому лежать в сложности или кольца R, или поля k, или модуля E, или всех трех вместе.

Указанное выше представление ρ называется *вполне приводимым*, или *полупростым*, если E есть R-прямая сумма R-подмодулей E_i

$$E = E_1 \oplus \ldots \oplus E_m,$$

причем каждый E_i неприводим. Мы также говорим, что E вполне приводим. Неверно, что все представления вполне приводимы, и, например, те, которые мы будем рассматривать в этой главе, как правило, не будут такими. Некоторые типы вполне приводимых представлений будут изучены позже.

Имеется специальный тип представлений, который будет встречаться особенно часто. Пусть $v \in E$, и пусть $E = Rv$. Мы пишем также $E = (v)$. Тогда мы говорим, что модуль E — *главный* (над R) и что представление — *главное*. В этом случае множество элементов $x \in R$, для которых $xv = 0$, будет левым идеалом $\mathfrak{a}$ в R (очевидно). Отображение R в E, задаваемое правилом

$$x \mapsto xv,$$

индуцирует изоморфизм R-модулей

$$R/\mathfrak{a} \to E$$

(R рассматривается как левый модуль над собой и $R/\mathfrak{a}$ — как фактормодуль). При этом отображении единичному элементу 1 кольца R сопоставляется образующая v модуля E.

Примем следующее соглашение: если $v_1, \ldots, v_n \in E$, то будем обозначать через $(v_1, \ldots, v_n)$ подмодуль в E, порожденный элементами $v_1, \ldots, v_n$.

Пусть E имеет некоторое разложение в прямую сумму R-подмодулей

$$E = E_1 \oplus \ldots \oplus E_s.$$

Предположим, что каждый E_i свободен и имеет размерность $\geqslant 1$ над k. Пусть $\mathscr{B}_1, \ldots, \mathscr{B}_s$ — базисы над k для $E_1, \ldots, E_s$ соответственно. Тогда $\{\mathscr{B}_1, \ldots, \mathscr{B}_s\}$ есть базис для E. Пусть $\varphi \in R$, φ_i — эндоморфизмы, индуцированные φ на E_i, и M_i — матрица φ_i относительно базиса $\mathscr{B}_i$. Тогда матрица M эндоморфизма φ относительно

$\{\mathscr{B}_1, \ldots, \mathscr{B}_s\}$ принимает вид

$$\begin{pmatrix} M_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & M_2 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & & \\ \cdot & & \cdot & \\ \cdot & & & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & 0 \\ 0 & \cdot\ \cdot\ \cdot & 0 & M_s \end{pmatrix}.$$

Про матрицу такого типа говорят, что она разлагается на *блоки* $M_1, \ldots, M_s$. При наличии такого разложения изучение эндоморфизма φ или его матрицы полностью сводится (так сказать) к изучению блоков.

Это случается далеко не всегда, однако часто имеет место нечто почти столь же хорошее. Пусть E' — подмодуль в E, инвариантный относительно R. Предположим, что имеется базис E' над k, скажем $\{v_1, \ldots, v_m\}$, и что этот базис может быть дополнен до базиса

$$\{v_1, \ldots, v_m, v_{m+1}, \ldots, v_n\}.$$

Это всегда так, если k — поле.

Пусть $\varphi \in R$. Тогда матрица эндоморфизма φ относительно этого базиса имеет вид

$$\begin{pmatrix} M' & * \\ 0 & M'' \end{pmatrix}.$$

Действительно, так как E' отображается при φ в себя, то ясно, что мы получим M' в левом верхнем углу и нулевую матрицу под ним. Кроме того, для всякого $j = m+1, \ldots, n$ мы можем записать

$$\varphi v_j = c_{j1}v_1 + \ldots + c_{jm}v_m + c_{j,m+1}v_{m+1} + \ldots + c_{mn}v_n.$$

Транспонируя матрицу (c_{ji}), получаем матрицу

$$\begin{pmatrix} * \\ M'' \end{pmatrix},$$

стоящую справа в матрице, представляющей φ.

Рассмотрим, далее, точную последовательность

$$0 \to E' \to E \to E'' \to 0.$$

Пусть $\bar{v}_{m+1}, \ldots, \bar{v}_n$ — образы $v_{m+1}, \ldots, v_n$ при каноническом отображении $E \to E''$. Мы можем естественным образом определить линейное отображение

$$\varphi'' \colon E'' \to E'',$$

так чтобы $\overline{\varphi v} = \varphi''(\bar{v})$ для всех $v \in E$. Тогда ясно, что матрицей для φ'' относительно базиса $\{\bar{v}_{m+1}, \ldots, \bar{v}_n\}$ служит M''.