§ 4. Характеристический многочлен

Пусть k — коммутативное кольцо и E — свободный модуль размерности n над k. Рассмотрим кольцо многочленов $k[t]$ и линейное отображение A: $E \to E$. Имеем гомоморфизм

$$k[t] \to k[A],$$

определяемый как и выше, который переводит многочлен $f(t)$ в $f(A)$, и E превращается в модуль над кольцом $R = k[t]$. Пусть M — любая матрица размера $n \times n$ над R (например, матрица отображения A относительно некоторого базиса в E). *Характеристическим многочленом* $P_M(t)$ мы называем определитель

$$\det(tI_n - M),$$

где I_n — единичная матрица размера $n \times n$. Это элемент из $k[t]$. Кроме того, если N — обратимая матрица над R, то

$$\det(tI_n - N^{-1}MN) = \det(N^{-1}(tI_n - M)N) = \det(tI_n - M).$$

Следовательно, характеристический многочлен у матрицы $N^{-1}MN$ тот же самый, что и у M. Мы можем поэтому определить характеристический многочлен отображения A (и обозначить его через P_A) как характеристический многочлен любой матрицы M, ассоциированной с A относительно некоторого базиса. (В случае $E = 0$ мы *по определению считаем характеристический многочлен равным* 1.)

Если φ: $k \to k'$ — гомоморфизм коммутативных колец и M — матрица размера $n \times n$ над k, то очевидно, что

$$P_{\varphi M}(t) = \varphi P_M(t),$$

где φP_M получается из P_M применением φ к коэффициентам P_M.

Теорема 8 (Кэли — Гамильтон). $P_A(A) = 0$.

Доказательство. Пусть $\{v_1, \ldots, v_n\}$ — базис E над k. Тогда

$$tv_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} v_i,$$

где $(a_{ij}) = M$ — матрица отображения A относительно этого базиса. Пусть $B(t)$ обозначает матрицу $tI_n - M$. Очевидно, $B(t)$ — матрица с коэффициентами в $k[t]$. Пусть $\tilde{B}(t)$ — определенная в гл. XIII матрица с коэффициентами в $k[t]$, такая, что

$$\tilde{B}(t)B(t) = P_A(t)I_n.$$

Тогда

$$\tilde{B}(t)\,B(t)\begin{pmatrix} v_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_A(t)\,v_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ P_A(t)\,v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix},$$

так как

$$B(t)\begin{pmatrix} v_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $P_A(t)E = 0$, а потому $P_A(A)E = 0$. Это означает, что $P_A(A) = 0$, что и требовалось показать.

Пусть теперь k — поле. Пусть E — конечномерное векторное пространство над k и $A \in \mathrm{End}_k(E)$. Под *собственным вектором* w эндоморфизма A в E понимают элемент $w \in E$, такой, что существует элемент $\lambda \in k$, для которого $Aw = \lambda w$. Если $w \neq 0$, то λ определяется однозначно и называется *собственным значением* эндоморфизма A. Разумеется, различные собственные векторы могут иметь одинаковые собственные значения.

Теорема 9. *Собственные значения эндоморфизма A — это в точности корни его характеристического многочлена.*

Доказательство. Пусть λ — собственное значение. Тогда элемент $A - \lambda I$ необратим в $\mathrm{End}_k(E)$ и, значит, $\det(A - \lambda I) = 0$. Следовательно, λ — корень P_A. Рассуждение обратимо, тем самым доказано и обратное утверждение.

Для упрощения обозначений мы часто будем писать $A - \lambda$ вместо $A - \lambda I$.

Теорема 10. *Ненулевые собственные векторы $w_1, \ldots, w_m$ отображения A, имеющие различные собственные значения, линейно независимы.*

Доказательство. Предположим, что

$$a_1 w_1 + \ldots + a_m w_m = 0,$$

где $a_i \in k$, причем это самое короткое соотношение, в котором не все $a_i = 0$ (в предположении, что такое существует). Тогда $a_i \neq 0$ для всех i. Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ — собственные значения наших векторов. Применим к предыдущему соотношению $A - \lambda_1$. Получим соотношение

$$a_2(\lambda_2 - \lambda_1)\,w_2 + \ldots + a_m(\lambda_m - \lambda_1)\,w_m = 0,$$

которое короче исходного соотношения, — противоречие.

Следствие. *Если A имеет n различных собственных значений $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, принадлежащих собственным векторам $v_1, \ldots, v_n$, и $\dim E = n$, то $\{v_1, \ldots, v_n\}$ есть базис для E. Матрицей эндоморфизма A относительно этого базиса служит диагональная матрица*

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & 0 \\ & \lambda_2 & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & \cdot \\ 0 & & & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Предостережение. Не всегда верно, что существует базис E, состоящий из собственных векторов!

Замечание. Пусть k — подполе в k'. Если M — матрица над k, то мы можем определить ее характеристический многочлен как относительно k, так и относительно k'. Очевидно, что полученные таким путем характеристические многочлены равны. Пусть E — векторное пространство над k. Позже мы увидим, как расширить его до векторного пространства над k'. Всякое линейное отображение A продолжается до линейного отображения расширенного пространства, причем характеристический многочлен линейного отображения не изменяется. Действительно, если мы выберем базис E над k, то $E \approx k^{(n)}$ и $k^{(n)} \subset k'^{(n)}$ естественным образом. Таким образом, выбор базиса позволяет нам расширить векторное пространство, но создается впечатление, что результат зависит от выбора базиса. Инвариантное определение будет дано ниже.

Пусть $E = E_1 \oplus \ldots \oplus E_r$ — представление E в виде прямой суммы векторных пространств над k. Пусть $A \in \mathrm{End}_k(E)$, причем $AE_i \subset E_i$ для $i = 1, \ldots, r$. Тогда A индуцирует на E_i линейное отображение A_i. Мы можем выбрать базис для E, состоящий из базисов для $E_1, \ldots, E_r$, и тогда матрица для A будет состоять из блоков. Мы видим, таким образом, что

$$P_A(t) = \prod_{i=1}^{r} P_{A_i}(t).$$

Итак, характеристический многочлен мультипликативен на прямых суммах.

Наше предыдущее условие $AE_i \subset E_i$ можно также сформулировать, сказав, что E представимо как $k[A]$-прямая сумма $k[A]$-подмодулей или как $k[t]$-прямая сумма $k[t]$-подмодулей. Применим это к разложению пространства E, даваемому теоремой 6.

Теорема 11. *Пусть E — конечномерное векторное пространство над полем k, $A \in \mathrm{End}_k(E)$ и $q_1, \ldots, q_r$ — инварианты пары (E, A). Тогда $P_A(t) = q_1(t) \ldots q_r(t)$.*

Доказательство. Предположим, что $E = k^{(n)}$ и что A представляется матрицей M. Мы видели, что ни инварианты, ни характеристический многочлен не изменяются, когда мы расширяем поле k до большего поля. Следовательно, мы можем считать, что поле k алгебраически замкнуто. Ввиду теоремы 6 мы можем предполагать, что M имеет единственный инвариант q. Запишем

$$q(t) = (t - \alpha_1)^{e_1} \ldots (t - \alpha_s)^{e_s},$$

где $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ различны. Рассмотрим M как линейное отображение и разложим наше векторное пространство в прямую сумму подмодулей (над $k[t]$) с инвариантами

$$(t - \alpha_1)^{e_1}, \ldots, (t - \alpha_s)^{e_s}$$

соответственно (это есть разложение на слагаемые, соответствующие степеням простых элементов). Для каждого из этих подмодулей мы можем выбрать базис так, чтобы матрица индуцированного линейного отображения имела форму, описанную в теореме 7, после чего непосредственно видно, что характеристический многочлен отображения, имеющего инвариант $(t - \alpha)^e$, равен в точности $(t - \alpha)^e$. Теорема доказана.

Следствие. *Минимальный многочлен отображения A и его характеристический многочлен имеют одни и те же неприводимые множители.*

Доказательство. Это вытекает из того, что в силу теоремы 6 q_r есть минимальный многочлен.

Обобщим наше замечание, касающееся мультипликативности характеристического многочлена на прямых суммах.

Теорема 12. *Пусть k — коммутативное кольцо, и пусть в следующей диаграмме:*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & E' \arrow[r] \arrow[d, "A'"'] & E \arrow[r] \arrow[d, "A"'] & E'' \arrow[r] \arrow[d, "A''"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & E' \arrow[r] & E \arrow[r] & E'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

строки являются точными последовательностями свободных модулей над k, имеющих конечную размерность. Пусть, далее, вертикальные отображения являются k-линейными отображениями, для которых диаграмма коммутативна. Тогда

$$P_A(t) = P_{A'}(t) P_{A''}(t).$$

Доказательство. Мы можем предполагать, что E' — подмодуль в E. Выберем базис $\{v_1, \ldots, v_m\}$ для E'. Пусть $\{\bar{v}_{m+1}, \ldots, \bar{v}_n\}$ — базис для E'' и $v_{m+1}, \ldots, v_n$ — элементы из E, отображающиеся на $\bar{v}_{m+1}, \ldots, \bar{v}_n$ соответственно. Тогда $\{v_1, \ldots, v_m, v_{m+1}, \ldots, v_n\}$ будет базисом для E (доказательство такое же, как в теореме 3 из гл III, § 5), и мы находимся в ситуации, описанной в § 1. Матрица для A имеет форму

$$\begin{pmatrix} M' & * \\ 0 & M'' \end{pmatrix},$$

где M' — матрица для A' и M'' — матрица для A''. Взяв характеристический многочлен относительно этой матрицы, мы, очевидно, и получим наше мультипликативное свойство.

Теорема 13 *Пусть k — коммутативное кольцо, E — свободный модуль размерности n над k и $A \in \mathrm{End}_k(E)$. Пусть*

$$P_A(t) = t^n + c_{n-1}t^{n-1} + \ldots + c_0.$$

Тогда

$$\mathrm{tr}(A) = -c_{n-1} \quad \text{и} \quad \det(A) = (-1)^n c_0.$$

Доказательство Что касается определителя, то заметим, что $P_A(0) = c_0$. Подстановка $t = 0$ в определение характеристического многочлена через определитель доказывает, что $c_0 = (-1)^n \det A$

Перейдем к следу. Пусть M — матрица, представляющая A относительно некоторого базиса, $M = (a_{ij})$ Рассмотрим определитель $\det(tI_n - a_{ij})$. В его разложении по первому столбцу содержится диагональный член

$$(t - a_{11}) \ldots (t - a_{nn}),$$

который вносит в коэффициент при t^{n-1} вклад, равный

$$-(a_{11} + \ldots + a_{nn})$$

Никакой другой член в этом разложении ничего не добавляет к коэффициенту при t^{n-1}, так как степень t, встречающаяся в других членах, не превосходит t^{n-2}. Это доказывает наше утверждение, касающееся следа.

Следствие. *Пусть обозначения те же, что и в теореме* 12. *Тогда*

$$\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(A') + \mathrm{tr}(A'') \quad \text{и} \quad \det(A) = \det(A')\det(A'').$$

Доказательство. Очевидно.

Дадим теперь нашим результатам интерпретацию в терминах группы Эйлера — Гротендика.

Пусть k — коммутативное кольцо. Рассмотрим категорию, объектами которой являются пары (E, A), где E — k-модуль и $A \in \mathrm{End}_k(E)$. Определим морфизм

$$(E', A') \to (E, A)$$

как k-линейное отображение $E' \xrightarrow{k} E$, для которого коммутативна следующая диаграмма:

$$\begin{tikzcd} E' \arrow[r, "f"] \arrow[d, "A'"'] & E \arrow[d, "A"] \\ E' \arrow[r, "f"'] & E \end{tikzcd}$$

Мы можем определить ядро такого морфизма снова как пару. Действительно, пусть E'_0 — ядро $f\colon E' \to E$. Тогда A' отображает E'_0 в себя, так как $fA'E'_0 = AfE'_0 = 0$. Пусть A'_0 — ограничение A' на E'_0. Пара (E'_0, A'_0) по определению является ядром нашего морфизма.

Будем обозначать по-прежнему через f морфизм пары $(E', A') \to (E, A)$. Мы можем говорить о точной последовательности

$$(E', A') \to (E, A) \to (E'', A''),$$

понимая под этим, что точна индуцированная последовательность

$$E' \to E \to E''.$$

Мы будем также писать 0 вместо (0, 0) в соответствии с нашим общим соглашением использовать символ 0 для всех тех вещей, которые ведут себя подобно нулевому элементу.

Заметим, что наши пары ведут себя теперь формально как модули и что они фактически образуют абелеву категорию.

Пусть k — поле, и пусть $\mathcal{A}$ состоит из всех пар (E, A), где E имеет конечную размерность над k. *Тогда теорема* 12 *утверждает, что характеристический многочлен является отображением Эйлера — Пуанкаре, определенным для всякого объекта из нашей категории* $\mathcal{A}$, *со значениями в мультипликативном моноиде многочленов со старшим коэффициентом* 1. Так как значения этого отображения лежат в моноиде, то здесь используется несколько более общее понятие, чем введенное в гл. IV, где мы брали значения в группе. Разумеется, когда k есть поле, что наиболее часто встречается в приложениях, мы можем считать, что значения нашего отображения лежат в мультипликативной группе отличных от нуля рациональных функций, так что применимы наши предыдущие рассмотрения.

Аналогичное замечание справедливо также для следа и определителя. *Если k — поле, то след есть отображение Эйлера в аддитивную группу поля, а определитель — отображение Эйлера*

в мультипликативную группу поля[1]). Отметим также, что все эти отображения (подобно всем отображениям Эйлера) определены на классах пар относительно изоморфизма и что они определены на группе Эйлера — Гротендика.

Теорема 14. *Пусть k — целостное кольцо, M — матрица размера $n \times n$ над k и f — многочлен из $k[t]$. Предположим, что $P_M(t)$ имеет разложение*

$$P_M(t) = \prod_{i=1}^{n} (t - \alpha_i)$$

на линейные множители над k. Тогда характеристический многочлен матрицы $f(M)$ задается формулой

$$P_{f(M)}(t) = \prod_{i=1}^{n} (t - f(\alpha_i))$$

и

$$\operatorname{tr}(f(M)) = \sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i), \qquad \det(f(M)) = \prod_{i=1}^{n} f(\alpha_i).$$

Доказательство. Допустим сначала, что k — поле. Тогда, используя каноническое разложение на блоки, описанное в теореме 7 § 3, мы обнаруживаем, что наше утверждение совершенно очевидно. В случае когда k — кольцо, используем стандартный прием с подстановкой. Для этого, однако, необходимо знать, что если $X = (x_{ij})$ — матрица с алгебраически независимыми элементами над $\mathbf{Z}$, то $P_X(t)$ имеет n различных корней $y_1, \ldots, y_n$ [в алгебраическом замыкании поля $\mathbf{Q}(X)$], и что существует гомоморфизм

$$\mathbf{Z}[x_{ij}, y_1, \ldots, y_n] \to k,$$

отображающий X на M и $y_1, \ldots, y_n$ на $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Но это очевидно для читателя, который прочитал главу о целых расширениях колец, а читатель, который этого не сделал, может забыть об этой части теоремы[2]).

УПРАЖНЕНИЯ

1. Пусть T — верхняя треугольная квадратная матрица над коммутативным кольцом (т. е. все элементы под диагональю и на ней равны 0). Показать, что T нильпотентна.

---

[1]) Точнее, в мультипликативную полугруппу, так как значение определителя может быть равно нулю. — *Прим. ред.*

[2]) Проще вложить k в поле частных. — *Прим. ред.*

2. Провести непосредственно доказательство того факта, что определитель матрицы

$$\begin{pmatrix} M_1 & & & & * & * \\ 0 & M_2 & & & & * \\ 0 & 0 & \ddots & & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & M_s & \end{pmatrix},$$

где каждая M_i — квадратная матрица, равен произведению определителей матриц $M_1, \dots, M_s$

3. Пусть k — коммутативное кольцо и M, M' — квадратные матрицы размера $n \times n$ над k. Показать, что характеристические многочлены матриц MM' и $M'M$ равны.

4. Показать, что собственные значения матрицы

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

в поле комплексных чисел равны ± 1, $\pm i$.

5. Пусть M, M' — квадратные матрицы над полем k. Пусть соответственно q, q' — их минимальные многочлены. Показать, что минимальный многочлен матрицы

$$\begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & M' \end{pmatrix}$$

равен наименьшему общему кратному q, q'.

6. Пусть A — нильпотентный эндоморфизм конечномерного векторного пространства E над полем k. Показать, что $\operatorname{tr}(A) = 0$.

7. Пусть R — целостное кольцо главных идеалов, E — свободный модуль размерности n над R и $E^* = \operatorname{Hom}_R(E, R)$ — его дуальный модуль. Тогда E^* — свободный модуль размерности n. Пусть F — подмодуль в E. Показать, что $E^*/F^\perp$ можно рассматривать как подмодуль в F^* и что его инварианты те же самые, что и инварианты F в E

8. Пусть E — конечномерное векторное пространство над полем k и $A \in \operatorname{Aut}_k(E)$. Показать, что следующие условия эквивалентны:

(i) $A = I + N$, где N — нильпотентный эндоморфизм

(ii) Существует базис для E, такой, что у матрицы эндоморфизма A относительно этого базиса все диагональные элементы равны 1, а все элементы над диагональю равны 0.

(iii) Все корни характеристического многочлена эндоморфизма A (в алгебраическом замыкании поля k) равны 1.

9. Пусть k — поле характеристики 0 и M — матрица размера $n \times n$ над k. Показать, что M нильпотентна в том и только в том случае, если $\operatorname{tr}(M^\nu) = 0$ для $1 \leqslant \nu \leqslant n$.

10. Обобщить теорему 14 на рациональные функции (вместо многочленов), предполагая, что k — поле.

11. Пусть E — конечномерное пространство над полем k, $\alpha \in k$ и E_α — подпространство в E, порожденное всеми собственными векторами данного эндоморфизма A пространства E, имеющими α в качестве собственного значения. Показать, что всякий ненулевой элемент из E_α является собственным вектором эндоморфизма A с собственным значением α.

12. Пусть E — конечномерное пространство над полем k, $A \in \mathrm{End}_k(E)$ — собственный вектор для A. Пусть элемент $B \in \mathrm{End}_k(E)$ таков, что $AB = BA$. Показать, что Bv — также собственный вектор для A (если $Bv \neq 0$) с тем же собственным значением и что в случае алгебраически замкнутого поля k эндоморфизмы A и B имеют общий собственный вектор.

Диагонализируемые эндоморфизмы. Пусть E — конечномерное векторное пространство над полем k, $S \in \mathrm{End}_k(E)$. Мы говорим, что эндоморфизм S — *диагонализируемый*, если существует базис для E, состоящий из собственных векторов S. Матрица эндоморфизма S относительно этого базиса является диагональной матрицей.

13. (а) Если эндоморфизм S диагонализируем, то его минимальный многочлен над k имеет вид $q(t) = \prod_{i=1}^{m} (t - \lambda_i)$, где $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ — различные элементы из k.

(б) Обратно, если минимальный многочлен для S имеет предыдущий вид, то эндоморфизм S диагонализируем. [*Указание*: пространство может быть разложено в прямую сумму подпространств $E\lambda_i$, аннулируемых эндоморфизмами $S - \lambda_i$.]

(в) Показать, что если эндоморфизм S диагонализируем и F — такое подпространство в E, что $SF \subset F$, то S диагонализируем также как эндоморфизм F, т. е. что F имеет базис, состоящий из собственных векторов S.

(г) Пусть S, T — эндоморфизмы E. Предположим, что S, T коммутируют. Предположим также, что и S, и T оба диагонализируемы. Показать, что они одновременно диагонализируемы, т. е. что существует базис для E, состоящий из векторов, собственных как для S, так и для T. [*Указание*: если λ — собственное значение эндоморфизма S и E_λ — подпространство в E, состоящее из всех векторов v, таких, что $Sv = \lambda v$, то $TE_\lambda \subset E_\lambda$.]

14. Пусть E — конечномерное векторное пространство над алгебраически замкнутым полем k, $A \in \mathrm{End}_k(E)$. Показать, что эндоморфизм A может быть единственным образом записан в виде суммы

$$A = S + N,$$

где S диагонализируем, N нильпотентен и $SN = NS$. Показать, что S, N могут быть представлены в виде многочленов от A. [*Указание*: пусть $P_A(t) = \prod (t - \lambda_i)^{m_i}$ — разложение $P_A(t)$ с различными λ_i; E_i — ядро $(A - \lambda_i)^{m_i}$. Тогда E — прямая сумма E_i. Определить S на E так, что на всяком E_i будет $Sv = \lambda_i v$ для всех $v \in E_i$. Положить $N = A - S$. Показать, что S, N удовлетворяют нашим требованиям. Чтобы представить S в виде многочлена от A, рассмотреть многочлен $g(t) = \sum \lambda_i g_i(t)$, где многочлены $g_i(t)$ выбраны так, что для всякого i компонента в E_i любого элемента $v \in E$ равна $g_i(A)v$. Тогда $S = g(A)$ и $N = A - g(A)$.]

15. После того как вы прочитаете параграф о тензорных произведениях векторных пространств, вы легко сможете сделать следующее упражнение. Пусть E, F — конечномерные векторные пространства над алгебраически

замкнутым полем k, $A\colon E \to E$ и $B\colon F \to F$ — k-эндоморфизмы пространств E, F соответственно. Пусть

$$P_A(t) = \prod (t - \alpha_i)^{n_i} \quad \text{и} \quad P_B(t) = \prod (t - \beta_j)^{m_j}$$

— разложения их характеристических многочленов на различные линейные множители. Тогда

$$P_{A \otimes B}(t) = \prod_{i,\, j} (t - \alpha_i \beta_j)^{n_i m_j}.$$

[*Указание*: разложить E в прямую сумму подпространств E_i, где E_i — подпространство, аннулируемое некоторой степенью $A - \alpha_i$. То же самое сделать с F и получить разложение в прямую сумму подпространств F_j. Затем показать, что некоторая степень эндоморфизма $A \otimes B - \alpha_i \beta_j$ аннулирует $E_i \otimes F_j$. Использовать тот факт, что $E \otimes F$ есть прямая сумма подпространств $E_i \otimes F_j$ и что $\dim_k (E_i \otimes F_j) = n_i m_j$.]

16. Пусть Γ — свободная абелева группа размерности $n \geqslant 1$, Γ' — ее подгруппа, имеющая также размерность n. Пусть $\{v_1, \ldots, v_n\}$ — базис Γ и $\{w_1, \ldots, w_n\}$ — базис Γ'. Запишем

$$w_i = \Sigma a_{ij} v_j.$$

Показать, что индекс $(\Gamma : \Gamma')$ равен абсолютной величине определителя матрицы (a_{ij}).

17. Доказать теорему о нормальном базисе для конечного расширения конечного поля.

18. Пусть $A = (a_{ij})$ — квадратная матрица размера $n \times n$ над коммутативным кольцом k, A_{ij} — матрица, полученная вычеркиванием i-й строки и j-го столбца из A. Пусть $b_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A_{ij})$ и B — матрица (b_{ij}). Показать, что $\det(B) = \det(A)^{n-1}$, сведя задачу к случаю, когда A — матрица с переменными коэффициентами над кольцом целых чисел. Использовать тот же метод для получения другого доказательства теоремы Гамильтона — Кэли о том, что $P_A(A) = 0$.

19. Пусть (E, A) и (E', A') — пары, состоящие из конечномерного векторного пространства над некоторым полем k и k-эндоморфизма. Показать, что эти пары изоморфны в том и только в том случае, если их инварианты равны.