Глава XVI

Полилинейные произведения

§ 1. *Тензорное произведение*

Пусть k — коммутативное кольцо. Для модулей $E_1, \ldots, E_n$, F обозначим через

$$L^n(E_1, \ldots, E_n; F)$$

модуль n-линейных отображений

$$f\colon E_1 \times \ldots \times E_n \to F.$$

Напомним, что полилинейное отображение линейно над k по каждой переменной. Мы будем использовать слова „линейное отображение“ и „гомоморфизм“ как синонимы. *Если не оговорено противное, то все модули, гомоморфизмы, линейные и полилинейные отображения рассматриваются по отношению к кольцу k.*

Полилинейные отображения фиксированного множества модулей $E_1, \ldots, E_n$ можно рассматривать как объекты некоторой категории. Действительно, если

$$f\colon E_1 \times \ldots \times E_n \to F \quad \text{и} \quad g\colon E_1 \times \ldots \times E_n \to G$$

— полилинейные отображения, то мы определяем морфизм $f \to g$ как гомоморфизм $h\colon F \to G$, для которого коммутативна следующая диаграмма:

$$\begin{tikzcd} & F \arrow[dd, "h"] \\ E_1 \times \ldots \times E_n \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "g"'] & \\ & G \end{tikzcd}$$

Универсальный объект этой категории называется *тензорным произведением модулей* $E_1, \ldots, E_n$ (над k).

Докажем теперь, что тензорное произведение существует, и фактически построим его некоторым естественным способом. Из абстрактной чепухи нам, разумеется, известно, что тензорное произведение однозначно определено с точностью до единственного изоморфизма.

Пусть M — свободный модуль, порожденный множеством всех n-наборов $(x_1, \ldots, x_n)$ $(x_i \in E_i)$, т. е. порожденный множеством

$E_1 \times \ldots \times E_n$. Обозначим через N его подмодуль, порожденный всеми элементами следующего вида:

$$(x_1, \ldots, x_i + x_i', \ldots, x_n) - (x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) - (x_1, \ldots, x_i', \ldots, x_n),$$
$$(x_1, \ldots, ax_i, \ldots, x_n) - a(x_1, \ldots, ax_i, \ldots, x_n),$$

где $x_i \in E_i$, $x_i' \in E_i$, $a \in k$. Имеем каноническое вложение

$$E_1 \times \ldots \times E_n \to M$$

нашего множества в порожденный им свободный модуль. Взяв композицию этого отображения с каноническим отображением $M \to M/N$ на фактормодуль, получим отображение

$$\varphi\colon E_1 \times \ldots \times E_n \to M/N.$$

Мы утверждаем, что φ полилинейно и является тензорным произведением.

Что φ полилинейно, — очевидно; все было как раз приспособлено для этой цели. Пусть

$$f\colon E_1 \times \ldots \times E_n \to G$$

— полилинейное отображение. По определению свободного модуля, порожденного множеством $E_1 \times \ldots \times E_n$, имеем индуцированное линейное отображение $M \to G$, для которого коммутативна следующая диаграмма:

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[d] \\ E_1 \times \ldots \times E_n \arrow[ur] \arrow[r, "f"'] & G \end{tikzcd}$$

Так как f полилинейно, то индуцированное отображение $M \to G$ принимает значение 0 на N. Следовательно, в силу универсального свойства фактормодулей это отображение может быть пропущено через M/N и, мы имеем гомоморфизм $f_*\colon M/N \to G$, для которого коммутативна следующая диаграмма:

$$\begin{tikzcd} & M/N \arrow[d, "f_*"] \\ E_1 \times \ldots \times E_n \arrow[ur, "\varphi"] \arrow[r, "f"'] & G \end{tikzcd}$$

Так как образ отображения φ порождает M/N, то индуцированное отображение f_* однозначно определено. Это доказывает все, что нам требовалось.

Модуль M/N будет обозначаться через $E_1 \otimes \ldots \otimes E_n$ или также через $\bigotimes_{i=1}^{n} E_i$. Мы построили специальное тензорное произведение в классе тензорных произведений относительно изоморфизма, и именно за ним мы закрепим название тензорного произведения модулей $E_1, \ldots, E_n$. Для $x_i \in E_i$ будем записывать

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) = x_1 \otimes \ldots \otimes x_n = x_1 \otimes_k \ldots \otimes_k x_n.$$

Для всех i имеем

$$x_1 \otimes \ldots \otimes a x_i \otimes \ldots \otimes x_n = a(x_1 \otimes \ldots \otimes x_n),$$

$$x_1 \otimes \ldots \otimes (x_i + x_i') \otimes \ldots \otimes x_n =$$
$$= (x_1 \otimes \ldots \otimes x_i \otimes \ldots \otimes x_n) + (x_1 \otimes \ldots \otimes x_i' \otimes \ldots \otimes x_n),$$

где $x_i, x_i' \in E_i$ и $a \in k$.

В случае двух сомножителей, скажем E, F, всякий элемент из $E \otimes F$ может быть записан как сумма членов $x \otimes y$ с $x \in E$ и $y \in F$, поскольку такие члены порождают $E \otimes F$ над k и $a(x \otimes y) = ax \otimes y$ для $a \in k$.

Предостережение. Тензорное произведение может приводить к полному или частичному взаимному уничтожению модулей. Возьмем, например, тензорное произведение над $\mathbf{Z}$ абелевых групп $\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$ и $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, где m, n — взаимно простые целые числа, большие единицы. Тогда тензорное произведение

$$\mathbf{Z}/n\mathbf{Z} \otimes \mathbf{Z}/m\mathbf{Z} = 0.$$

Действительно, имеем $n(x \otimes y) = (nx) \otimes y = 0$ и $m(x \otimes y) = x \otimes (my) = 0$. Следовательно, $x \otimes y = 0$ для всех $x \in \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ и $y \in \mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$. А так как элементы вида $x \otimes y$ порождают тензорное произведение, то оно равно 0. Позднее мы найдем условия, при которых съеданий такого рода не происходит.

Во многих дальнейших результатах мы будем утверждать существование и единственность каких-либо линейных отображений тензорного произведения. Это существование доказывается использованием универсального свойства тензорного произведения, позволяющего пропускать через него билинейные отображения. Единственность вытекает из того факта, что линейные отображения принимают предписанное значение на элементах (скажем, для двух множителей) вида $x \otimes y$, поскольку такие элементы порождают тензорное произведение.

Докажем ассоциативность тензорного произведения.

Предложение 1. *Пусть E_1, E_2, E_3 — модули. Тогда существует однозначно определенный изоморфизм*

$$(E_1 \otimes E_2) \otimes E_3 \to E_1 \otimes (E_2 \otimes E_3),$$

такой, что

$$(x \otimes y) \otimes z \mapsto x \otimes (y \otimes z)$$

для $x \in E_1$, $y \in E_2$ и $z \in E_3$.

Доказательство. Так как элементы вида $(x \otimes y) \otimes z$ порождают тензорное произведение, то единственность искомого линейного отображения очевидна. Чтобы доказать существование, возьмем $x \in E_1$. Отображение

$$\lambda_x\colon\ E_2 \times E_3 \to (E_1 \otimes E_2) \otimes E_3,$$

такое, что $\lambda_x(y, z) = (x \otimes y) \otimes z$, очевидно, билинейно и, следовательно, может быть пропущено через линейное отображение тензорного произведения

$$\overline{\lambda}_x\colon\ E_2 \otimes E_3 \to (E_1 \otimes E_2) \otimes E_3.$$

Отображение

$$E_1 \times (E_2 \otimes E_3) \to (E_1 \otimes E_2) \otimes E_3,$$

такое, что

$$(x, \alpha) \mapsto \overline{\lambda}_x(\alpha)$$

для $x \in E_1$ и $\alpha \in E_2 \otimes E_3$, также, очевидно, билинейно, и оно пропускается через линейное отображение

$$E_1 \otimes (E_2 \otimes E_3) \to (E_1 \otimes E_2) \otimes E_3,$$

которое и обладает требуемыми свойствами (ясно из его построения).

Предложение 2. *Для всяких модулей E, F существует однозначно определенный изоморфизм*

$$E \otimes F \to F \otimes E,$$

такой, что $x \otimes y \mapsto y \otimes x$ для $x \in E$ и $y \in F$.

Доказательство. Отображение $E \times F \to F \otimes E$, такое, что $(x, y) \mapsto y \otimes x$, билинейно, и оно пропускается через линейное отображение тензорного произведения $E \otimes F$, переводящее $x \otimes y$ в $y \otimes x$. Так как это последнее отображение имеет обратное (по симметрии), то и получаем искомый изоморфизм.

Тензорное произведение обладает различными функториальными свойствами. Во-первых, пусть

$$f_i\colon\ E'_i \to E_i \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

— набор линейных отображений. Имеем индуцированное отображение произведения

$$\Pi f_i\colon\ \Pi E'_i \to \Pi E_i.$$

Если мы возьмем композицию Πf_i с каноническим отображением в тензорное произведение, то получим индуцированное линейное отображение, которое мы можем обозначить через $T(f_1, \ldots, f_n)$ и для которого коммутативна следующая диаграмма:

$$\begin{array}{ccc} E_1' \times \ldots \times E_n' & \to & E_1' \otimes \ldots \otimes E_n' \\ \Big\downarrow {\scriptstyle \Pi f_i} & & \Big\downarrow {\scriptstyle T(f_1, \ldots, f_n)} \\ E_1 \times \ldots \times E_n & \to & E_1 \otimes \ldots \otimes E_n. \end{array}$$

Непосредственно проверяется, что T функториально, а именно что для композиции линейных отображений $f_i \circ g_i$ $(i = 1, \ldots, n)$

$$T(f_1 \circ g_1, \ldots, f_n \circ g_n) = T(f_1, \ldots, f_n) \circ T(g_1, \ldots, g_n)$$

и

$$T(\mathrm{id}, \ldots, \mathrm{id}) = \mathrm{id}.$$

Заметим, что $T(f_1, \ldots, f_n)$—это однозначно определенное линейное отображение, действие которого на элемент $x_1' \otimes \ldots \otimes x_n'$ из $E_1' \otimes \ldots \otimes E_n'$ задается правилом

$$x_1' \otimes \ldots \otimes x_n' \mapsto f_1(x_1') \otimes \ldots \otimes f_n(x_n').$$

Мы можем рассматривать T как отображение

$$\prod_{i=1}^{n} L(E_i', E_i) \to L\left(\bigotimes_{i=1}^{n} E_i', \bigotimes_{i=1}^{n} E_i\right),$$

и читатель легко проверит, что это отображение полилинейное. Мы выпишем в явном виде, что́ это означает в случае двух множителей, когда наше отображение может быть записано так:

$$(f, g) \mapsto T(f, g).$$

Для заданных гомоморфизмов $f\colon F' \to F$ и $g_1, g_2\colon E' \to E$

$$T(f, g_1 + g_2) = T(f, g_1) + T(f, g_2),$$
$$T(f, ag_1) = aT(f, g_1).$$

В частности, выберем некоторый фиксированный модуль F и рассмотрим функтор $\tau = \tau_F$ (из категории модулей в категорию модулей), такой, что

$$\tau(E) = F \otimes E.$$

Тогда τ для всякой пары модулей E', E определяет линейное отображение

$$\tau\colon L(E', E) \to L(\tau(E'), \tau(E))$$

по формуле

$$\tau(f) = T(\mathrm{id}, f).$$

Замечание. Допуская вольность в обозначениях, иногда мы будем писать

$$f_1 \otimes \ldots \otimes f_n \text{ вместо } T(f_1, \ldots, f_n).$$

Это не надо путать с тензорным произведением элементов, взятым в тензорном произведении модулей

$$L(E_1', E_1) \otimes \ldots \otimes L(E_n', E_n).$$

Из контекста всегда будет ясно, что мы имеем в виду.

§ 2. Основные свойства

Самым основным соотношением, связывающим линейные отображения, билинейные отображения и тензорное произведение, является следующее: для трех модулей E, F, G

$$\boxed{L(E, L(F, G)) \approx L^2(E, F; G) \approx L(E \otimes F, G)}.$$

Содержащиеся здесь изоморфизмы описываются естественным образом

(i) $$L^2(E, F; G) \to L(E, L(F, G)).$$

Если f: $E \times F \to G$ — билинейное отображение и $x \in E$, то отображение

$$f_x\colon F \to G,$$

для которого $f_x(y) = f(x, y)$, линейно. Кроме того, отображение $x \longmapsto f_x$ также линейно, и для получения (i) именно это отображение и сопоставляется f.

(ii) $$L(E, L(F, G)) \to L^2(E, F; G).$$

Пусть $\varphi \in L(E, L(F, G))$ и f_φ: $E \times F \to G$ — билинейное отображение, для которого

$$f_\varphi(x, y) = \varphi(x)(y).$$

Тогда $\varphi \longmapsto f_\varphi$ определяет (ii).

Ясно, что гомоморфизмы (i) и (ii) взаимно обратны и поэтому дают изоморфизм первых двух объектов в рамке.

(iii) $$L^2(E, F; G) \to L(E \otimes F, G).$$

Это то отображение, которое сопоставляет каждому билинейному отображению f индуцированное линейное отображение f_*. Сопоставление $f \longmapsto f_*$ инъективно (так как f_* однозначно определяет f) и сюръективно, так как любое линейное отображение тензорного произведения в композиции с каноническим отображением $E \times F \to E \otimes F$ определяет билинейное отображение на $E \times F$.