Если A, B, C — k-алгебры и если φ, ψ таковы, что коммутативна следующая диаграмма:

$$\begin{tikzcd} & C & \\ A \arrow[ur, "\varphi"] & & B \arrow[ul, "\psi"'] \\ & k \arrow[ul] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

то $A \otimes_k B$ также есть k-алгебра (фактически это есть алгебра над k, над A или над B, в зависимости от того, какую из этих структур мы хотим использовать) и отображение $A \otimes_k B \to C$, полученное выше, дает гомоморфизм k-алгебр.

Любое коммутативное кольцо всегда можно рассматривать как $\mathbf{Z}$-алгебру (т. е. как алгебру над кольцом целых чисел). Таким образом, копроизведение коммутативных колец является частным случаем копроизведения k-алгебр.

§ 5. Тензорная алгебра модуля

Пусть G — коммутативный моноид, записываемый аддитивно. Под *G-градуированным кольцом* мы будем понимать кольцо A, для аддитивной группы которого задано представление в виде прямой суммы

$$A = \coprod_{r \in G} A_r,$$

а умножение в A отображает $A_r \times A_s$ в A_{r+s} для всех r, $s \in G$.

В частности, A_0 — подкольцо.

Элементы из A_r называются *однородными элементами степени r*.

Мы построим несколько примеров градуированных колец по следующему образцу. Пусть для всякого $r \in G$ задана абелева группа A_r (записываемая аддитивно), и пусть для всякой пары r, $s \in G$ задано отображение $A_r \times A_s \to A_{r+s}$. Предположим, что определяемая этими отображениями композиция ассоциативна и $\mathbf{Z}$-билинейна. Тогда прямая сумма $A = \coprod_{r \in G} A_r$ является кольцом: умножение вводится очевидным образом, а именно

$$\left(\sum_{r \in G} x_r\right)\left(\sum_{s \in G} y_s\right) = \sum_{t \in G}\left(\sum_{r+s=t} x_r y_s\right).$$

Применим эти соображения к случаю, когда G — моноид натуральных чисел 0, 1, 2, ...

Пусть k обозначает, как и прежде, коммутативное кольцо, и пусть E — некоторый модуль (т. е. k-модуль). Для всякого целого $r \geqslant 0$ положим

$$T^r(E) = \bigotimes_{i=1}^{r} E \quad \text{и} \quad T^0(E) = k.$$

Таким образом, $T^r(E) = E \otimes \ldots \otimes E$ (тензорное произведение, взятое r раз). Тогда T^r есть функтор, действие которого на линейные отображения задается следующим образом. Если $f\colon E \to F$ — линейное отображение, то

$$T^r(f) = T(f, \ldots, f)$$

в смысле § 1.

Из ассоциативности тензорного произведения получаем билинейные отображения

$$T^r(E) \times T^s(E) \to T^{r+s}(E),$$

являющиеся ассоциативными. Посредством этих билинейных отображений мы можем на прямой сумме

$$T(E) = \prod_{r=0}^{\infty} T^r(E)$$

определить структуру кольца, а в действительности даже структуру алгебры (отображая k на $T^0(E) = k$). Мы будем называть $T(E)$ *тензорной алгеброй* модуля E над k. В общем случае она *не* коммутативна. Для обозначения кольцевой операции в $T(E)$ мы будем писать $x \otimes y$ $(x, y \in T(E))$.

Пусть $f\colon E \to F$ — линейное отображение. Тогда f для всякого $r \geqslant 0$ индуцирует линейное отображение

$$T^r(f)\colon T^r(E) \to T^r(F)$$

и, таким образом, индуцирует отображение на $T(E)$, которое мы будем обозначать символом $T(f)$. (Можно не опасаться путаницы с отображением из § 1, которое теперь следовало бы обозначать $T^1(f)$ и которое на самом деле равно f, так как $T^1(E) = E$.) Ясно, что $T(f)$ — это однозначно определенное линейное отображение, такое, что для $x_1, \ldots, x_r \in E$

$$T(f)(x_1 \otimes \ldots \otimes x_r) = f(x_1) \otimes \ldots \otimes f(x_r).$$

В действительности элементы из $T^1(E)$ являются образующими для $T(E)$ как алгебры над k. Мы видим, что $T(f)$ является гомоморфизмом алгебр. Таким образом, T может рассматриваться как функтор из категории модулей в категорию градуированных алгебр, причем $T(f)$ является гомоморфизмом степени 0.

В случае когда модуль E свободен и конечномерен над k, мы можем, используя предложение 4, полностью определить структуру $T(E)$. Пусть P — некоторая алгебра над k. Мы будем говорить, что P — *алгебра некоммутативных многочленов*, если существуют такие элементы $t_1, \ldots, t_n \in P$, что элементы

$$M_{(i)}(t) = t_{i_1} \ldots t_{i_r},$$

где $1 \leqslant i_\nu \leqslant n$, образуют базис для P над k. Мы можем назвать эти элементы *некоммутативными одночленами* от (t). Как обычно, принимается соглашение, что при $r=0$ соответствующий одночлен совпадает с единичным элементом алгебры P. Мы видим, что $t_1, \ldots, t_n$ порождают P как алгебру над k и что P в действительности является градуированной алгеброй, однородная компонента P_r которой состоит из линейных комбинаций одночленов $t_{i_1} \ldots t_{i_r}$ с коэффициентами из k. Естественно сказать, что $t_1, \ldots, t_n$ — *независимые некоммутативные переменные над* k.

Предложение 10. *Пусть E — свободный модуль размерности n над k. Тогда алгебра $T(E)$ изоморфна алгебре некоммутативных многочленов от n переменных над k. Другими словами, если $\{v_1, \ldots, v_n\}$ — базис E над k, то элементы*

$$M_{(i)}(v) = v_{i_1} \otimes \ldots \otimes v_{i_r}, \quad 1 \leqslant i_\nu \leqslant n,$$

образуют базис $T^r(E)$ и всякий элемент из $T(E)$ имеет единственное представление в виде конечной суммы

$$\sum_{(i)} a_{(i)} M_{(i)}(v), \qquad a_{(i)} \in k,$$

где почти все $a_{(i)}$ равны 0.

Доказательство. Это тотчас следует из предложения 4, § 2.

Теперь будет дана интерпретация тензорного произведения линейных отображений в связи с понятием тензорной алгебры.

Для удобства мы до конца этого параграфа будем обозначать модуль эндоморфизмов $\mathrm{End}_k(E)$ *через* $L(E)$.

Образуем прямую сумму

$$(LT)(E) = \prod_{r=0}^{\infty} L(T^r(E)),$$

которую для краткости будем также обозначать через $LT(E)$. [Разумеется, $LT(E)$ не равно $\mathrm{End}_k(T(E))$, так что мы должны рассматривать LT как единый символ.] Определив подходящим образом умножение в $LT(E)$, мы увидим, что LT есть функтор из категории модулей в категорию градуированных алгебр. Пусть $f \in L(T^r(E))$, $g \in L(T^s(E))$, $h \in L(T^m(E))$. Определим произведение $fg \in L(T^{r+s}(E))$ как $T(f, g)$ в обозначениях § 1, другими словами, как однозначно определенное линейное отображение, действие которого на элемент $x \otimes y$, где $x \in T^r(E)$ и $y \in T^s(E)$, задается формулой

$$x \otimes y \longmapsto f(x) \otimes g(y).$$

Ввиду ассоциативности тензорного произведения тотчас получаем ассоциативность $(fg)h = f(gh)$; кроме того, мы видим, что наше произведение билинейно. Следовательно, $LT(E)$ есть k-алгебра.

Имеет место гомоморфизм алгебр

$$T(L(E)) \to LT(E),$$

который в каждой размерности r задается линейным отображением

$$f_1 \otimes \ldots \otimes f_r \mapsto T(f_1, \ldots, f_r) = f_1 \ldots f_r.$$

Подчеркнем специально, что тензорное произведение слева взято из

$$L(E) \otimes \ldots \otimes L(E).$$

Отметим также, что этот гомоморфизм в общем случае не будет ни сюръективным, ни инъективным. Оказывается, однако, что когда E — свободный конечномерный модуль над k, то этот гомоморфизм обладает обоими этими свойствами, и, таким образом, в этом случае нам становится ясной структура $LT(E)$ как алгебры некоммутативных многочленов, порожденной $L(E)$. А именно, из предложения 5, § 2, получаем

Предложение 11. *Пусть E — свободный конечномерный модуль над k. Тогда имеет место изоморфизм алгебр*

$$T(L(E)) = T(\mathrm{End}_k(E)) \to LT(E) = \prod_{r=0}^{\infty} \mathrm{End}_k(T^r(E)),$$

задаваемый отображением

$$f \otimes g \mapsto T(f, g).$$

Доказательство. В силу предложения 5 из § 2 в каждой размерности имеет место линейный изоморфизм и ясно, что наше отображение сохраняет умножение.

В частности, мы видим, что $LT(E)$ — алгебра некоммутативных многочленов.

§ 6. Знакопеременные произведения

Напомним, что r-линейное отображение $f\colon E^{(r)} \to F$ называется *знакопеременным*, если $f(x_1, \ldots, x_r) = 0$, как только $x_i = x_j$ для некоторых $i \neq j$.

Пусть $\mathfrak{a}_r$ — подмодуль в $T^r(E)$, порожденный всеми элементами вида $x_1 \otimes \ldots \otimes x_r$, где $x_i = x_j$ для некоторых $i \neq j$. Положив

$$\wedge^r(E) = T^r(E)/\mathfrak{a}_r,$$

будем иметь r-линейное отображение $E^{(r)} \to \wedge^r(E)$ (называемое *каноническим*), получаемое из композиции

$$E^{(r)} \to T^r(E) \to T^r(E)/\mathfrak{a}_r = \wedge^r(E).$$