виально, поскольку сразу же проверяется, что $v_1 \otimes \ldots \otimes v_n$ не лежит в $\mathfrak{a}_n$. Этот другой подход к теореме доказывает тогда существование определителей.

§ 7. Симметрические произведения

Пусть $\mathfrak{S}_n$ обозначает симметрическую группу на n символах, действующую, скажем, на множестве целых чисел $(1, \ldots, n)$. Рассмотрим r-линейное отображение

$$f\colon E^{(r)} \to F;$$

оно называется *симметрическим*, если $f(x_1, \ldots, x_r) = f(x_{\sigma(1)}, \ldots \ldots, x_{\sigma(r)})$ для всех $\sigma \in \mathfrak{S}_r$.

Пусть $\mathfrak{b}_r$ — подмодуль в $T^r(E)$, порожденный всеми элементами вида

$$x_1 \otimes \ldots \otimes x_r - x_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes x_{\sigma(r)},$$

где $x_i \in E$ и $\sigma \in \mathfrak{S}_r$. Введем фактормодуль

$$S^r(E) = T^r(E)/\mathfrak{b}_r$$

и рассмотрим прямую сумму

$$S(E) = \coprod_{r=0}^{\infty} S^r(E).$$

Непосредственно ясно, что прямая сумма

$$\mathfrak{b} = \coprod_{r=0}^{\infty} \mathfrak{b}_r$$

— идеал в $T(E)$ и, следовательно, $S(E)$ — градуированная k-алгебра, называемая *симметрической алгеброй* модуля E.

Далее, каноническое отображение

$$E^{(r)} \to S^r(E),$$

получаемое композицией отображений

$$E^{(r)} \to T^r(E) \to T^r(E)/\mathfrak{b}_r = S^r(E),$$

универсально для r-линейных симметрических отображений. Все это уже должно стать для читателя шаблонным.

Отметим, что S — функтор из категории модулей в категорию градуированных k-алгебр. Образ $(x_1, \ldots, x_r)$ при каноническом отображении

$$E^{(r)} \to S^r(E)$$

будет обозначаться просто через $x_1 \ldots x_r$.

Предложение 13. *Пусть E — свободный модуль размерности n над k, $\{v_1, \ldots, v_n\}$ — некоторый базис для E над k. Элементы этого базиса, рассматриваемые как элементы из $S^1(E)$ в $S(E)$, алгебраически независимы над k, и алгебра $S(E)$ изоморфна поэтому алгебре многочленов от n переменных над k.*

Доказательство. Взяв алгебраически независимые переменные $t_1, \ldots, t_n$ над k, образуем алгебру многочленов $k[t_1, \ldots, t_n]$. Пусть P_r — k-модуль однородных многочленов степени r. Определим отображение $E^{(r)} \to P_r$ следующим образом. Если $w_1, \ldots, w_r$ — элементы из E, которые могут быть записаны в виде

$$w_i = \sum_{\nu=1}^{n} a_{i\nu} v_\nu, \quad i = 1, \ldots, r,$$

то наше отображение задается правилом

$$(w_1 \ldots, w_r) \longmapsto (a_{11}t_1 + \ldots + a_{1n}t_n) \ldots (a_{r1}t_1 + \ldots + a_{rn}t_n).$$

Очевидно, что это отображение полилинейно и симметрично. Следовательно, оно может быть пропущено через линейное отображение $S^r(E)$ в P_r:

$$\begin{tikzcd} E^{(r)} \arrow[r] \arrow[dr] & S^r(E) \arrow[d] \\ & P_r \end{tikzcd}$$

Из коммутативности нашей диаграммы ясно, что для всякого набора из r целых чисел $(i) = (i_1, \ldots, i_r)$ элемент $v_{i_1} \ldots v_{i_r}$ из $S^r(E)$ отображается на $t_{i_1} \ldots t_{i_r}$ в P_r. Так как одночлены $M_{(i)}(t)$ степени r линейно независимы над k, то одночлены $M_{(i)}(v)$ в $S^r(E)$ также линейно независимы над k, и наше отображение $S^r(E) \to P_r$ является изоморфизмом. Тотчас проверяется, что умножение в $S(E)$ соответствует умножению многочленов в $k[t]$ и, следовательно, отображение $S(E)$ в алгебру многочленов, описанное выше для каждой компоненты $S^r(E)$, индуцирует изоморфизм алгебры $S(E)$ на алгебру $k[t]$, что и требовалось.

§ 8. Кольцо Эйлера — Гротендика

Пусть k — поле и G — группа. Под *(G, k)-модулем* мы будем понимать пару (E, ρ), состоящую из k-пространства E и гомоморфизма

$$\rho\colon\ G \to \mathrm{Aut}_k(E).$$

Такой гомоморфизм называется также *представлением* G в E. Допуская вольность речи, мы будем также говорить, что k-пространство E является *G-модулем.* Группа G действует на E, и мы пи-