Предложение 13. *Пусть E — свободный модуль размерности n над k, $\{v_1, \ldots, v_n\}$ — некоторый базис для E над k. Элементы этого базиса, рассматриваемые как элементы из $S^1(E)$ в $S(E)$, алгебраически независимы над k, и алгебра $S(E)$ изоморфна поэтому алгебре многочленов от n переменных над k.*

Доказательство. Взяв алгебраически независимые переменные $t_1, \ldots, t_n$ над k, образуем алгебру многочленов $k[t_1, \ldots, t_n]$. Пусть P_r — k-модуль однородных многочленов степени r. Определим отображение $E^{(r)} \to P_r$ следующим образом. Если $w_1, \ldots, w_r$ — элементы из E, которые могут быть записаны в виде

$$w_i = \sum_{\nu=1}^{n} a_{i\nu} v_\nu, \quad i = 1, \ldots, r,$$

то наше отображение задается правилом

$$(w_1 \ldots, w_r) \mapsto (a_{11}t_1 + \ldots + a_{1n}t_n) \ldots (a_{r1}t_1 + \ldots + a_{rn}t_n).$$

Очевидно, что это отображение полилинейно и симметрично. Следовательно, оно может быть пропущено через линейное отображение $S^r(E)$ в P_r:

$$\begin{tikzcd} E^{(r)} \arrow[rr] \arrow[dr] & & S^r(E) \arrow[dl] \\ & P_r & \end{tikzcd}$$

Из коммутативности нашей диаграммы ясно, что для всякого набора из r целых чисел $(i) = (i_1, \ldots, i_r)$ элемент $v_{i_1} \ldots v_{i_r}$ из $S^r(E)$ отображается на $t_{i_1} \ldots t_{i_r}$ в P_r. Так как одночлены $M_{(i)}(t)$ степени r линейно независимы над k, то одночлены $M_{(i)}(v)$ в $S^r(E)$ также линейно независимы над k, и наше отображение $S^r(E) \to P_r$ является изоморфизмом. Тотчас проверяется, что умножение в $S(E)$ соответствует умножению многочленов в $k[t]$ и, следовательно, отображение $S(E)$ в алгебру многочленов, описанное выше для каждой компоненты $S^r(E)$, индуцирует изоморфизм алгебры $S(E)$ на алгебру $k[t]$, что и требовалось.

§ 8. Кольцо Эйлера — Гротендика

Пусть k — поле и G — группа. Под *(G, k)-модулем* мы будем понимать пару (E, ρ), состоящую из k-пространства E и гомоморфизма

$$\rho\colon G \to \mathrm{Aut}_k(E).$$

Такой гомоморфизм называется также *представлением* G в E. Допуская вольность речи, мы будем также говорить, что k-пространство E является *G-модулем.* Группа G действует на E, и мы пишем σx вместо $\rho(\sigma)x$. Поле k во всем последующем будет оставаться фиксированным.

Пусть $\mathfrak{M}(G)$ обозначает категорию, объектами которой являются (G, k)-модули. Морфизмами в $\mathfrak{M}(G)$ служат так называемые *G-гомоморфизмы*, т. е. k-линейные отображения f: $E \to F$, такие, что $f(\sigma x) = \sigma f(x)$.

Если E — G-модуль и $\sigma \in G$, то мы имеем по определению k-автоморфизм σ: $E \to E$. Поскольку T^r — функтор, для всякого r имеем индуцированный автоморфизм

$$T^r(\sigma)\colon\ T^r(E) \to T^r(E),$$

так что $T^r(E)$ также является G-модулем. Беря прямую сумму, мы видим, что $T(E)$ есть G-модуль и, следовательно, T — функтор из категории G-модулей в категорию градуированных G-модулей. Аналогично для $\bigwedge^r$, S^r и $\bigwedge$, S.

Ясно, что ядром G-гомоморфизма будет G-модуль и фактормодулем G-модуля по G-подмодулю — снова G-модуль. Пусть $\mathfrak{M}_G$ — множество классов (G, k)-модулей относительно G-изоморфизма. Это множество является моноидом, сложение в котором представляется на модулях прямой суммой. Имеем *гомоморфизм Гротендика*

$$\gamma\colon\ \mathfrak{M}_G \to K(G)$$

моноида $\mathfrak{M}_G$ в группу Гротендика $K(G)$, взятую относительно точных последовательностей (ср. также с конструкцией в гл. IV, § 3). Для простоты мы пишем $K(G)$ вместо $K(\mathfrak{M}_G)$.

Если $[E]$ обозначает класс E относительно изоморфизма, то будем также писать $\gamma(E)$ вместо $\gamma([E])$.

Если E, F — G-модули, то их тензорное произведение $E \otimes F$ над k также является G-модулем. Здесь снова действие G на $E \otimes F$ задается функториально. Для всякого $\sigma \in G$ существует однозначно определенное k-линейное отображение $E \otimes F \to E \otimes F$, такое, что для $x \in E$, $y \in F$ имеем $x \otimes y \mapsto \sigma(x) \otimes \sigma(y)$. Тензорное произведение индуцирует закон композиции на $\mathfrak{M}_G$, так как тензорные произведения G-изоморфных модулей G-изоморфны. Мы утверждаем, что $\mathfrak{M}_G$ является также мультипликативным моноидом. Наш закон композиции ассоциативен, поскольку тензорное произведение ассоциативно. Существует единичный элемент, а именно класс модуля k над G, причем действие G на k определяется правилом $(\sigma, a) \mapsto a$ для всех $\sigma \in G$ и $a \in k$ (таким образом, $\sigma a = a$).

Произведение на $\mathfrak{M}_G$, очевидно, дистрибутивно относительно сложения, так как тензорное произведение прямой суммы есть прямая сумма тензорных произведений.

Наконец, поскольку $E \otimes F$ G-изоморфно $F \otimes E$, наше умножение в $\mathfrak{M}_G$ коммутативно. Таким образом, $\mathfrak{M}_G$ — моноид относительно сложения и коммутативный моноид относительно тензорного произведения, причем умножение в нем $\mathbf{Z}$-билинейно по отношению к сложению.

Так как k — поле, то тензорное умножение точной последовательности G-модулей над k на любой G-модуль над k сохраняет точность. Благодаря этому *можно определить произведение в* $K(G)$, *которое однозначно задается условием*

$$\gamma(E)\gamma(F)=\gamma(E\otimes F)$$

для всех G-модулей E, F. Отсюда тривиально следует, что $K(G)$ есть кольцо и что γ — гомоморфизм как для аддитивного, так и для мультипликативного закона на $\mathfrak{M}_G$. Поэтому мы можем назвать $K(G)$ *кольцом Гротендика* группы G (над k). Так как G фиксирована, то мы будем также писать K вместо $K(G)$.

Если E — G-модуль, то мы пишем $\lambda^i(E)$ для обозначения элемента $\gamma(\bigwedge^i(E))$, другими словами, элемента в $K(G)$, который является образом при γ модуля $\bigwedge^i(E)$ или, более точно, класса этого модуля относительно изоморфизма.

Определим теперь отображение $\mathfrak{M}_G$ в кольцо степенных рядов $K[[t]]$, а именно отображение λ_t, такое, что

$$\lambda_t(E)=\sum_{i=0}^{\infty}\lambda^i(E)t^i.$$

Так как $\bigwedge^0(E)=k$, то $\lambda^0(E)=1$. Следовательно, наше отображение является на самом деле *отображением в мультипликативную группу* степенных рядов, начинающихся с 1. Мы будем записывать эту группу в виде

$$1+tK[[t]].$$

Таким образом, λ_t есть отображение

$$\lambda_t\colon \mathfrak{M}_G\to 1+tK[[t]].$$

Предложение 14. *Для любых k-модулей E, F имеет место изоморфизм*

$$\coprod_{i+j=r}\bigwedge^i(E)\otimes\bigwedge^j(F)\to\bigwedge^r(E\oplus F).$$

Доказательство. Доказательство предоставляется читателю в качестве упражнения.

Следствие. *Отображение λ_t, описанное выше, является гомоморфизмом $\mathfrak{M}_G$ в мультипликативную группу* $1+tK[[t]]$.

Ввиду универсальности $K(G)$ мы можем продолжить λ_t на $K(G)$ [или, более точно, пропустить λ_t через $K(G)$]. Индуцированное отображение на $K(G)$ будет снова обозначаться через λ_t.

Обозначим через $s^i(E)$ элемент $\gamma(S^i(E))$ в кольце Гротендика.

Предложение 15. *Для любого G-модуля E положим*

$$s_t(E) = \sum_{i=0}^{\infty} s^i(E)\, t^i.$$

Тогда $s_t(E)\lambda_{-t}(E) = 1$.

Доказательство этого утверждения сложнее, и необходимая для его получения техника составляет первую главу любого изложения, имеющего дело с более глубокими аспектами только что введенных структур.

В заключение — один пример.

Предположим, что E одномерно над k. Тогда $\lambda^i(E) = 0$ для $i > 0$. Следовательно,

$$\lambda_t(E) = 1 + \gamma(E)\, t$$

и

$$\lambda_{-t}(-\gamma(E)) = \frac{1}{1-\gamma(E)\, t} = 1 + \gamma(E)\, t + \gamma(E)^2 t^2 + \ldots .$$

В случае когда группа G тривиальна, можно дать простое доказательство предложения 15, сведя его к одномерному случаю.

§ 9. *Некоторые функториальные изоморфизмы*

Начнем с одного абстрактного определения. Пусть $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ — две категории. Функторы из $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{B}$ (скажем, ковариантные от одной переменной) могут рассматриваться как объекты некоторой категории, морфизмы которой определяются следующим образом. Если L, M — два таких функтора, то морфизм H: $L \to M$ — это правило, которое каждому объекту X из $\mathfrak{A}$ сопоставляет морфизм H_X: $L(X) \to M(X)$ из $\mathfrak{B}$, такой, что для любого морфизма f: $X \to Y$ из $\mathfrak{A}$ коммутативна следующая диаграмма:

$$\begin{array}{ccc} L(X) & \xrightarrow{H_X} & M(X) \\ {\scriptstyle L(f)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle M(f)} \\ L(Y) & \xrightarrow[H_Y]{} & M(Y) \end{array}$$

Мы можем поэтому говорить об изоморфизме функторов. Ниже мы увидим примеры подобных изоморфизмов в теории тензорных произведений. Категории, рассматриваемые в наших приложениях, являются аддитивными, т. е. в них множества морфизмов образуют аддитивные группы, а закон композиции $\mathbf{Z}$-билинеен. В этом случае функтор L называется *аддитивным*, если $L(f+g) = L(f) + L(g)$.