Предложение 15. *Для любого G-модуля E положим*

$$s_t(E) = \sum_{i=0}^{\infty} s^i(E)\, t^i.$$

Тогда $s_t(E)\,\lambda_{-t}(E) = 1$.

Доказательство этого утверждения сложнее, и необходимая для его получения техника составляет первую главу любого изложения, имеющего дело с более глубокими аспектами только что введенных структур.

В заключение — один пример.

Предположим, что E одномерно над k. Тогда $\lambda^i(E) = 0$ для $i > 0$. Следовательно,

$$\lambda_t(E) = 1 + \gamma(E)\, t$$

и

$$\lambda_{-t}(-\gamma(E)) = \frac{1}{1-\gamma(E)\, t} = 1 + \gamma(E)\, t + \gamma(E)^2 t^2 + \ldots .$$

В случае когда группа G тривиальна, можно дать простое доказательство предложения 15, сведя его к одномерному случаю.

§ 9. Некоторые функториальные изоморфизмы

Начнем с одного абстрактного определения. Пусть $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ — две категории. Функторы из $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{B}$ (скажем, ковариантные от одной переменной) могут рассматриваться как объекты некоторой категории, морфизмы которой определяются следующим образом. Если L, M — два таких функтора, то морфизм $H\colon L \to M$ — это правило, которое каждому объекту X из $\mathfrak{A}$ сопоставляет морфизм $H_X\colon L(X) \to M(X)$ из $\mathfrak{B}$, такой, что для любого морфизма $f\colon X \to Y$ из $\mathfrak{A}$ коммутативна следующая диаграмма:

$$\begin{tikzcd} L(X) \arrow[r, "H_X"] \arrow[d, "L(f)"'] & M(X) \arrow[d, "M(f)"] \\ L(Y) \arrow[r, "H_Y"'] & M(Y) \end{tikzcd}$$

Мы можем поэтому говорить об изоморфизме функторов. Ниже мы увидим примеры подобных изоморфизмов в теории тензорных произведений. Категории, рассматриваемые в наших приложениях, являются аддитивными, т. е. в них множества морфизмов образуют аддитивные группы, а закон композиции $\mathbf{Z}$-билинеен. В этом случае функтор L называется *аддитивным*, если $L(f+g) = L(f) + L(g)$.

Пусть k — коммутативное кольцо. Мы будем рассматривать аддитивные функторы из категории k-модулей в себя, например, функтор перехода к дуальному модулю

$$E \longmapsto E^* = L(E, k) = \mathrm{Hom}_k(E, k).$$

Аналогично имеем функтор от двух переменных

$$(E, F) \longmapsto L(E, F) = \mathrm{Hom}_k(E, F),$$

который контравариантен по первому, ковариантен по второму аргументу и биаддитивен.

Мы приведем несколько примеров функториальных изоморфизмов, связанных с тензорным произведением; для этого нам будет удобно иметь общую теорему, дающую критерий того, когда морфизм функторов является на самом деле изоморфизмом.

Предложение 16. *Пусть L, M — два функтора (оба ковариантных или контравариантных) из категории k-модулей в себя. Предположим, что оба функтора аддитивны. Пусть $H\colon L \to M$ — морфизм функторов. Если $H_E\colon L(E) \to M(E)$ является изоморфизмом для всякого одномерного свободного модуля E над k, то H_E — изоморфизм для всякого конечномерного свободного модуля над k.*

Доказательство. Начнем с леммы.

Лемма. *Пусть E и E_i $(i = 1, \ldots, m)$ — модули над некоторым кольцом, $\varphi_i\colon E_i \to E$ и $\psi_i\colon E \to E_i$ — гомоморфизмы, обладающие следующими свойствами:*

$$\psi_i \circ \varphi_i = \mathrm{id}, \quad \psi_i \circ \varphi_j = 0 \quad \text{при } i \neq j,$$

$$\sum_{i=1}^{m} \varphi_i \circ \psi_i = \mathrm{id}.$$

Тогда отображение

$$x \longmapsto (\psi_1 x, \ldots, \psi_m x)$$

определяет изоморфизм E на прямое произведение $\prod_{i=1}^{m} E_i$, а отображение

$$(x_1, \ldots, x_m) \longmapsto \varphi_1 x_1 + \ldots + \varphi_m x_m$$

— изоморфизм прямого произведения на E. Обратно, если модуль E равен прямой сумме подмодулей E_i $(i = 1, \ldots, m)$ и если ψ_i — вложение E_i в E, а φ_i — проекция E на E_i, то эти отображения обладают указанными выше свойствами.

Доказательство. Доказательство шаблонно и по существу совпадает с доказательством предложения 2 из гл. III, § 3. Мы предоставляем его читателю в качестве упражнения.

Заметим, что семейства $\{\varphi_i\}$ и $\{\psi_i\}$, обладающие указанными в лемме свойствами, ведут себя функториально: если T — аддитивный функтор, *скажем контравариантный, то семейства* $\{T(\psi_i)\}$ *и* $\{T(\varphi_i)\}$ также обладают этими свойствами. Аналогично, если T — ковариантный функтор.

Применим лемму, взяв в качестве модулей E_i одномерные компоненты, возникающие из разложения E по какому-либо базису. Предположим, например, что оба функтора L, M ковариантны. Для всякого модуля E имеют место коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd} L(E) \arrow[r, "H_E"] & M(E) \\ L(E_i) \arrow[u, "L(\varphi_i)"] \arrow[r, "H_{E_i}"'] & M(E_i) \arrow[u, "M(\varphi_i)"'] \end{tikzcd}$$

и аналогичная диаграмма, получающаяся заменой φ_i на ψ_i и обращением двух вертикальных стрелок. Следовательно, мы получаем разложение $L(E)$ в прямую сумму, определяемое отображениями $L(\psi_i)$ и $L(\varphi_i)$, и аналогично для $M(E)$ и отображений $M(\psi_i)$ и $M(\varphi_i)$. По предположению H_{E_i} — изоморфизмы. Отсюда тривиально вытекает, что H_E — изоморфизм. Чтобы, к примеру, доказать инъективность, запишем элемент $v \in L(E)$ в виде

$$v = \sum L(\varphi_i) v_i,$$

где $v_i \in L(E_i)$. Если $H_E v = 0$, то

$$0 = \sum H_E L(\varphi_i) v_i = \sum M(\varphi_i) H_{E_i} v_i,$$

и так как отображения $M(\varphi_i)$ дают разложение $M(E)$ в прямую сумму, то заключаем, что $H_{E_i} v_i = 0$ для всех i, откуда $v_i = 0$ и $v = 0$. Доказательство сюръективности столь же тривиально.

Если мы имеем дело с функтором от нескольких переменных, аддитивным по каждой из них, то, сохраняя все, кроме одной, из этих переменных фиксированными, мы можем применить предыдущее предложение. Именно так мы и поступаем в приводимых ниже следствиях.

Следствие 1. *Пусть* E', E, F', F — *свободные конечномерные модули над* k. *Имеет место функториальный изоморфизм*

$$L(E', E) \otimes L(F', F) \to L(E' \otimes F', E \otimes F),$$

такой, что

$$f \otimes g \longmapsto T(f, g).$$

Доказательство. Фиксируем E, F', F и рассматриваем $L(E', E) \otimes L(F', F)$ как функтор от одной переменной E'. Аналогично рассматриваем

$$L(E' \otimes F', E \otimes F)$$

как функтор от E'. Отображение $f \otimes g \longmapsto T(f, g)$ функториально, и, следовательно, согласно лемме, достаточно доказать, что оно дает изоморфизм, когда E' имеет размерность 1. Пусть модуль E' имеет размерность 1. Фиксируем его и рассмотрим два выражения, фигурирующих в следствии как функторы от E. Повторное применение леммы показывает, что достаточно установить, что наше отображение является изоморфизмом, когда E имеет размерность 1. Аналогично мы можем предполагать, что F, F' также имеют размерность 1. В этом случае проверка того, что отображение является изоморфизмом, тривиальна и следствие доказано.

Следствие 2. *Пусть E, F — свободные конечномерные модули. Имеет место изоморфизм*

$$\mathrm{End}_k(E) \otimes \mathrm{End}_k(F) \to \mathrm{End}_k(E \otimes F).$$

Доказательство. Частный случай следствия 1.

Отметим, что следствие 2 уже было доказано раньше, и мы упомянули его здесь только для того, чтобы видно было, как оно связано с принятой в этом параграфе точкой зрения.

Следствие 3. *Пусть E, F — свободные конечномерные модули над k. Имеет место функториальный изоморфизм*

$$E^* \otimes F \to L(E, F),$$

задаваемый для $x^* \in E^*$ и $y \in F$ отображением

$$x^* \otimes y \longmapsto \lambda,$$

где λ — такой элемент из $L(E, F)$, что $\lambda(x) = \langle x, x^* \rangle y$ для всех $x \in E$.

Обратный изоморфизм может быть описан следующим образом. Пусть $\{v_1, \ldots, v_n\}$ — базис в E и $\{v_1^*, \ldots, v_n^*\}$ — дуальный базис. Если A — элемент из $L(E, F)$, то его прообразом в тензорном произведении является элемент

$$\sum_{i=1}^{n} v_i^* \otimes A(v_i).$$

В частности, если $E = F$, то прообразом тождественного автоморфизма id_E служит элемент

$$\sum_{i=1}^{n} v_i^* \otimes v_i.$$

Доказательство следствия 3 получается сведéнием к случаю, когда оба модуля E, F одномерны, а в этом случае утверждение очевидно. Вывод указанной выше явной формулы для обратного отображения предоставляется читателю в качестве упражнения.

Дифференциальные геометры очень любят изоморфизм

$$L(E, E) \to E^* \otimes E$$

и часто, мысля геометрически о $L(E, E)$, используют в записи $E^* \otimes E$, благодаря чему без всякой надобности делается ударение на дуализации и совершенно не относящемся к делу формализме, тогда как значительно проще работать непосредственно с $L(E, E)$.

В дифференциальной геометрии обычно применяют к касательному пространству в точке многообразия различные функторы L и элементы получаемых таким образом пространств называют *тензорами* (типа L).

Следствие 4. *Пусть E, F — свободные конечномерные модули над k. Имеет место функториальный изоморфизм*

$$E^* \otimes F^* \to (E \otimes F)^*,$$

задаваемый для $x^* \in E^*$ и $y^* \in F^*$ отображением

$$x^* \otimes y^* \mapsto \lambda,$$

где λ — такой элемент из $(E \otimes F)^*$, что

$$\lambda(x \otimes y) = \langle x, x^* \rangle \langle y, y^* \rangle$$

для всех $x \in E$ и $y \in F$.

Доказательство. Такое же, как и выше.

Наконец, мы предлагаем в качестве упражнения следующий результат:

Предложение 17. *Пусть E — свободный конечномерный модуль над k. Функция следа на $L(E, E)$ равна композиции двух отображений*

$$L(E, E) \to E^* \otimes E \to k,$$

где первое отображение обратно к изоморфизму, описанному в следствии 3 предложения 16, а второе индуцировано билинейным отображением

$$(x^*, x) \mapsto \langle x, x^* \rangle.$$

Именно в тех ситуациях, когда встречается след, становится важным изоморфизм из следствия 3 и используется конечномерность E. Во многих же приложениях эта конечномерность не играет роли, и тогда лучше иметь дело непосредственно с $L(E, E)$.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Пусть k — поле, $k(\alpha)$ — конечное расширение $f(X) = \operatorname{Irr}(\alpha, k, X)$, причем многочлен f сепарабелен, и k' — произвольное расширение над k. Показать, что $k(\alpha) \otimes k'$ — прямая сумма полей. Показать, что если поле k' алгебраически замкнуто, то эти поля соответствуют вложениям $k(\alpha)$ в k'.

2. Пусть k — поле, $f(X)$ — неприводимый многочлен над k и α — корень f. Показать, что $k(\alpha) \otimes k'$ изоморфно как k'-алгебра фактор-кольцу $k'[X]/(f(X))$.

3. Доказать предложение 14, построив естественный гомоморфизм и сравнив размерности левой и правой частей равенства.

4. Предположим, что группа G в § 8 тривиальна, и будем писать K вместо $K(1)$. Для $x \in K$ положим

$$\psi_{-t}(x) = -t\,d \log \lambda_t(x) = -t\,\frac{\lambda_t'(x)}{\lambda_t(x)}, \quad \psi_t(x) = \sum_{k \geqslant 1} \psi^k(x)\, t^k.$$

Показать, что

$$\psi^k(x+y) = \psi^k(x) + \psi^k(y), \qquad \psi^k(xy) = \psi^k(x)\,\psi^k(y).$$

5. На модуле E над коммутативным кольцом задана билинейная форма. Объяснить, как действует расширение основного кольца: если $k \to k'$ — гомоморфизм коммутативных колец, то определить естественную билинейную форму на $E^{k'}$ над k'.

6. Пусть k — коммутативное кольцо. Обозначим через $L_a^r(E)$ модуль r-линейных знакопеременных отображений k-модуля E в k (т. е. модуль r-линейных знакопеременных форм на E). Положим, далее, $L_a^0(E) = k$ и

$$\Omega(E) = \prod_{r=0}^{\infty} L_a^r(E).$$

Показать, что $\Omega(E)$ — градуированная k-алгебра, умножение в которой определяется следующим образом. Если $\omega \in L_a^r(E)$, $\psi \in L_a^s(E)$ и $v_1, \ldots, v_{r+s}$ — элементы из E, то

$$(\omega \wedge \psi)(v_1, \ldots, v_{r+s}) = \sum \varepsilon(\sigma)\, \omega(v_{\sigma 1}, \ldots, v_{\sigma r})\, \psi(v_{\sigma(r+1)}, \ldots, v_{\sigma(r+s)}),$$

где сумма берется по всем перестановкам σ множества $(1, \ldots, r+s)$ таким, что $\sigma 1 < \ldots < \sigma r$ и $\sigma(r+1) < \ldots < \sigma(r+s)$.

7. Пусть E — свободный модуль размерности n над коммутативным кольцом k, $f\colon E \to E$ — линейное отображение и $\alpha_r(f) = \operatorname{tr} \Lambda^r(f)$, где $\Lambda^r(f)$ — эндоморфизм $\Lambda^r(E)$ в себя, индуцированный f. Имеем

$$\alpha_0(f) = 1, \quad \alpha_1(f) = \operatorname{tr} f, \quad \alpha_n(f) = \det f$$

и $\alpha_r(f) = 0$, если $r > n$. Показать, что

$$\det(1 + f) = \sum_{r \geqslant 0} \alpha_r(f).$$

[*Указание*: как обычно, доказать утверждение для случая, когда f представляется матрицей с переменными коэффициентами над кольцом целых чисел.] Интерпретировать $\alpha_r(f)$ в терминах коэффициентов характеристического многочлена отображения f.

8. Пусть E — конечномерный свободный модуль над коммутативным кольцом k, E^* — его дуальный модуль. Показать, что для всякого целого $r \geqslant 1$ $\wedge^r E$ и $\wedge^r E^*$ — модули, дуальные друг другу относительно билинейного отображения, такого, что

$$(v_1 \wedge \ldots \wedge v_r,\ v'_1 \wedge \ldots \wedge v'_r) \longmapsto \det(\langle v_i, v'_j \rangle),$$

где, как обычно, $\langle v_i, v'_j \rangle$ есть значение v'_j на v_i для $v_i \in E$ и $v'_j \in E^*$.

9. В обозначениях предыдущего упражнения пусть F — другой k-модуль, свободный и конечномерный и $f\colon E \to F$ — линейное отображение. Показать, что сопряженным к $\wedge^r f$ относительно билинейного отображения из предыдущего упражнения будет $\wedge^r({}^t f)$, т. е. r-я знакопеременная степень сопряженного к f отображения.

10. Пусть P — алгебра некоммутативных многочленов от n переменных над полем k, $x_1, \ldots, x_r$ — различные элементы из P_1 (т. е. линейные выражения от переменных $t_1, \ldots, t_n$) и $a_1, \ldots, a_r \in k$. Показать, что если

$$a_1 x_1^\nu + \ldots + a_r x_r^\nu = 0$$

для всех целых $\nu = 1, \ldots, r$, то $a_i = 0$ для $i = 1, \ldots, r$. [*Указание*: взять гомоморфизм в алгебру коммутативных многочленов и проводить рассуждения там.]

11. Пусть G — конечное множество эндоморфизмов конечномерного векторного пространства E над полем k. Для всякого $\sigma \in G$ пусть c_σ — элемент из k. Показать, что если

$$\sum_{\sigma \in G} c_\sigma T^r(\sigma) = 0$$

для всех целых $r \geqslant 1$, то $c_\sigma = 0$ для всех $\sigma \in G$. [*Указание*: использовать предыдущее упражнение и предложение 11.]

12. (Стейнберг). Пусть G — конечный моноид, $k[G]$ — моноидная алгебра над некоторым полем k и $G \to \mathrm{End}_k(E)$ — точное (т. е. инъективное) представление, так что мы можем отождествить G с некоторым мультипликативным подмножеством в $\mathrm{End}_k(E)$. Показать, что T^r индуцирует представление группы G на $T^r(E)$, откуда по линейности получается представление алгебры $k[G]$ на $T^r(E)$. Показать, что если $\alpha \in k[G]$ и $T^r(\alpha) = 0$ для всех целых $r \geqslant 1$, то $\alpha = 0$. [*Указание*: применить предыдущее упражнение.]

13. Когда вы прочитаете главу о представлениях конечных групп, выведите из упражнения 12 следующую теорему Бернсайда. Пусть G — конечная группа, k — поле характеристики, взаимно простой с порядком G, и E — конечномерное (G, k)-пространство, такое, что представление группы G — точное. Тогда всякое неприводимое представление G встречается с кратностью $\geqslant 1$ в некоторой тензорной степени $T^r(E)$.