Глава XVII

Полупростота

Во многих приложениях модули разлагаются в прямую сумму простых подмодулей, и в этих случаях можно развить некую структурную теорию, как в общих предпосылках, так и для специальных приложений. Настоящая глава посвящена результатам, которые могут быть доказаны в общей ситуации. В следующей главе мы рассмотрим те дополнительные результаты, которые могут быть доказаны в важном классическом частном случае.

При доказательстве теоремы плотности я более или менее следовал Бурбаки.

§ 1. Матрицы и линейные отображения над некоммутативными кольцами

В гл. XIII мы рассматривали исключительно матрицы над коммутативными кольцами. Для наших нынешних целей надо исследовать более общую ситуацию.

Пусть K — кольцо. Матрица (φ_{ij}) с коэффициентами в K определяется точно так же, как мы это делали для коммутативных колец. Произведение матриц определяется по той же самой формуле. По-прежнему имеют место ассоциативность и дистрибутивность, в случае когда размеры матриц таковы, что соответствующие операции для них определены. В частности, квадратные матрицы размера $n \times n$ над K образуют кольцо, обозначаемое, как и раньше, символом $\mathrm{Mat}_n(K)$. Имеет место кольцевой гомоморфизм

$$K \to \mathrm{Mat}_n(K)$$

на диагональ.

Напомним, что *телом* называется кольцо с $1 \neq 0$, в котором всякий ненулевой элемент обладает мультипликативным обратным.

Если K — тело, то всякий ненулевой K-модуль имеет базис и мощности любых двух базисов равны. Доказательство такое же, как в коммутативном случае: в рассуждениях мы нигде не использовали коммутативности. Эта мощность по-прежнему называется размерностью модуля над K, и модули над телами называются векторными пространствами.

Как и в коммутативном случае, мы можем всякому линейному отображению сопоставить матрицу, зависящую от выбора конечного базиса. Однако мы будем рассматривать несколько отличную ситуацию, которая нам потребуется для приложений к полупростым модулям.

Пусть R — кольцо, и пусть

$$E = E_1 \oplus \ldots \oplus E_n, \quad F = F_1 \oplus \ldots \oplus F_m$$

— R-модули, представленные в виде прямых сумм R-модулей. Мы хотим описать наиболее общий вид R-гомоморфизма модуля E в F.

Предположим сначала, что $F = F_1$ имеет одну компоненту. Пусть

$$\varphi\colon E_1 \oplus \ldots \oplus E_n \to F$$

— гомоморфизм и $\varphi_j\colon E_j \to F$ — ограничение φ на слагаемое E_j. Всякий элемент $x \in E$ имеет единственное представление $x = x_1 + \ldots + x_n$, где $x_j \in E_j$. Мы можем поэтому сопоставить элементу x столбец $X = {}^t(x_1, \ldots, x_n)$, компоненты которого лежат соответственно в $E_1, \ldots, E_n$, а гомоморфизму φ — строку $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$, $\varphi_j \in \mathrm{Hom}_R(E_j, F)$. Тогда действие φ на элемент x из E описывается умножением матриц — строки на столбец.

Более общо, рассмотрим гомоморфизм

$$\varphi\colon E_1 \oplus \ldots \oplus E_n \to F_1 \oplus \ldots \oplus F_m.$$

Пусть $\pi_i\colon F_1 \oplus \ldots \oplus F_m \to F_i$ — проекция на i-й множитель. Мы можем применить наше предыдущее замечание к $\pi_i \circ \varphi$ для каждого i. При этом мы обнаружим, что существуют однозначно определенные элементы $\varphi_{ij} \in \mathrm{Hom}_R(E_j, F_i)$, такие, что φ имеет матричное представление

$$M(\varphi) = \begin{pmatrix} \varphi_{11} & \cdots & \varphi_{1n} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \varphi_{m1} & \cdots & \varphi_{mn} \end{pmatrix},$$

причем действие φ на элемент x задается умножением матриц, а именно

$$\begin{pmatrix} \varphi_{11} & \cdots & \varphi_{1n} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \varphi_{m1} & \cdots & \varphi_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Обратно, если дана матрица (φ_{ij}) с $\varphi_{ij} \in \mathrm{Hom}_R(E_j, F_i)$, то с помощью нее можно определить элемент из $\mathrm{Hom}_R(E, F)$. Таким образом, мы получаем изоморфизм аддитивных групп между $\mathrm{Hom}_R(E, F)$ и этой группой матриц.

Пусть, в частности, E — фиксированный R-модуль и $K = \mathrm{End}_R(E)$. Тогда имеет место изоморфизм колец

$$\mathrm{End}_R\left(E^{(n)}\right) \to \mathrm{Mat}_n(K),$$

который всякому $\varphi \in \mathrm{End}_R\left(E^{(n)}\right)$ сопоставляет матрицу

$$\begin{bmatrix} \varphi_{11} & \cdots & \varphi_{1n} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \varphi_{n1} & \cdots & \varphi_{nn} \end{bmatrix},$$

определенную выше и действующую слева на столбцы из $E^{(n)}$ с компонентами из E.

Замечание. Пусть E — одномерное векторное пространство над телом D и $\{v\}$ — его базис. Для всякого $a \in D$ существует единственное D-линейное отображение $f_a\colon E \to E$, такое, что $f_a(v) = a^{-1}v$. Тогда справедливо правило

$$f_a f_b = f_{ba}.$$

Таким образом, когда мы сопоставляем линейному отображению матрицу, зависящую от базиса, умножение оказывается скрученным. Тем не менее утверждение, которое мы сформулировали перед этим замечанием, правильно! Дело в том, что, когда E одномерно, мы берем φ_{ij} в $\mathrm{End}_D(E)$, а не в D. Поэтому K не изоморфно D (в некоммутативном случае), а антиизоморфно. Это единственный пункт, в котором формальная элементарная теория линейных отображений различается в коммутативном и некоммутативном случаях.

Напомним, что R-модуль E называется *простым*, если он $\neq 0$ и не содержит подмодулей, отличных от 0 или E.

Предложение 1. *Пусть E, F — простые R-модули. Тогда всякий ненулевой гомоморфизм E в F является изоморфизмом, а кольцо $\mathrm{End}_R(E)$ — телом.*

Доказательство. Пусть $f\colon E \to F$ — ненулевой гомоморфизм. Его образ и ядро — подмодули, следовательно, равны соответственно F и 0, так что f — изоморфизм. Если $E = F$, то f обратим, что и требовалось доказать.

(Предложение 1 известно как *лемма Шура*.)

Следующее предложение полностью описывает кольцо эндоморфизмов прямой суммы простых модулей.

Предложение 2. *Пусть $E = E_1^{(n_1)} \oplus \ldots \oplus E_r^{(n_r)}$ — прямая сумма простых модулей, где E_i между собой неизоморфны и каждый E_i повторяется в сумме n_i раз. Тогда с точностью до перестановки и изоморфизмов $E_1, \ldots, E_r$ (а также и их кратности) однозначно определены. Кольцо* $\mathrm{End}_R(E)$ *изоморфно кольцу матриц вида*

$$\begin{pmatrix} M_1 & \ldots & 0 \\ \cdot & M_2 & \cdot \\ \cdot & \ddots & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ 0 & \ldots & M_r \end{pmatrix},$$

где M_i — матрица размера $n_i \times n_i$ над $\mathrm{End}_R(E_i)$. *(Изоморфизм этот совпадает с тем, который соответствует разложению в прямую сумму.)*

Доказательство. Последнее утверждение вытекает из наших предыдущих рассмотрений, если принять во внимание предложение 1. Утверждение же о простых слагаемых и их кратностях в прямых суммах является следствием общей теоремы Жордана — Гёльдера.

В случае когда E обладает разложением в (конечную) прямую сумму простых подмодулей, число раз, которое простой модуль из данного класса изоморфных модулей встречается в разложении, будет называться *кратностью* этого простого модуля (или его класса относительно изоморфизма).

Кроме того, если модуль

$$E = E_1^{(n_1)} \oplus, \ldots, \oplus E_r^{(n_r)}$$

представлен в виде прямой суммы простых подмодулей, то мы будем называть $n_1 + \ldots + n_r$ *длиной* E. Во многих случаях мы будем также писать

$$E = n_1 E_1 \oplus \ldots \oplus n_r E_r = \coprod_{i=1}^{r} n_i E_i.$$

§ 2. Условия, определяющие полупростоту

Пусть R — кольцо. Если специально не оговаривается противное, то все модули и все гомоморфизмы в этом параграфе предполагаются R-модулями и R-гомоморфизмами.

Следующие условия на модуль E эквивалентны: