Следующее предложение полностью описывает кольцо эндоморфизмов прямой суммы простых модулей.

Предложение 2. *Пусть* $E = E_1^{(n_1)} \oplus \ldots \oplus E_r^{(n_r)}$ — *прямая сумма простых модулей, где* E_i *между собой неизоморфны и каждый* E_i *повторяется в сумме* n_i *раз. Тогда с точностью до перестановки и изоморфизмов* $E_1, \ldots, E_r$ (*а также и их кратности*) *однозначно определены. Кольцо* $\mathrm{End}_R(E)$ *изоморфно кольцу матриц вида*

$$\begin{pmatrix} M_1 & \ldots & 0 \\ \cdot & M_2 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \ldots & M_r \end{pmatrix},$$

где M_i — *матрица размера* $n_i \times n_i$ *над* $\mathrm{End}_R(E_i)$. (*Изоморфизм этот совпадает с тем, который соответствует разложению в прямую сумму.*)

Доказательство. Последнее утверждение вытекает из наших предыдущих рассмотрений, если принять во внимание предложение 1. Утверждение же о простых слагаемых и их кратностях в прямых суммах является следствием общей теоремы Жордана — Гёльдера.

В случае когда E обладает разложением в (конечную) прямую сумму простых подмодулей, число раз, которое простой модуль из данного класса изоморфных модулей встречается в разложении, будет называться *кратностью* этого простого модуля (или его класса относительно изоморфизма).

Кроме того, если модуль

$$E = E_1^{(n_1)} \oplus, \ldots, \oplus E_r^{(n_r)}$$

представлен в виде прямой суммы простых подмодулей, то мы будем называть $n_1 + \ldots + n_r$ *длиной* E. Во многих случаях мы будем также писать

$$E = n_1 E_1 \oplus \ldots \oplus n_r E_r = \coprod_{i=1}^{r} n_i E_i.$$

§ 2. Условия, определяющие полупростоту

Пусть R — *кольцо. Если специально не оговаривается противное, то все модули и все гомоморфизмы в этом параграфе предполагаются* R-*модулями и* R-*гомоморфизмами.*

Следующие условия на модуль E эквивалентны:

ПП 1. E — сумма некоторого семейства простых подмодулей.

ПП 2. E — прямая сумма некоторого семейства простых подмодулей.

ПП 3. Всякий подмодуль F в E является прямым слагаемым, т. е. существует подмодуль F', такой, что $E = F \oplus F'$.

Сейчас мы докажем это.

Лемма. *Пусть $E = \sum_{i \in I} E_i$ — сумма (не обязательно прямая) простых подмодулей. Тогда существует подмножество $J \subset I$, такое, что E — прямая сумма $\coprod_{j \in J} E_j$.*

Доказательство. Пусть J — максимальное подмножество в I, такое, что сумма $\sum_{j \in J} E_j$ прямая. Мы утверждаем, что эта сумма в действительности равна E. Достаточно доказать, что каждый E_i содержится в этой сумме. Но пересечение нашей суммы с E_i является подмодулем в E_i и, следовательно, равно 0 или E_i. Если оно равно 0, то подмножество J немаксимально, поскольку мы можем присоединить к нему i. Следовательно, E_i содержится в сумме, и наша лемма доказана.

Лемма показывает, что ПП 1 влечет ПП 2. Чтобы убедиться, что ПП 2 влечет ПП 3, возьмем подмодуль F и максимальное подмножество J в I, такое, что сумма $F + \coprod_{j \in J} E_j$ — прямая. То же самое рассуждение, что и выше, показывает, что эта сумма равна E.

Чтобы доказать, что ПП 3 влечет ПП 1, докажем сначала, что всякий ненулевой подмодуль в E содержит некоторый простой подмодуль. Пусть F — ненулевой подмодуль и $v \in F$, $v \neq 0$. Тогда по определению Rv — главный подмодуль и ядро гомоморфизма

$$R \to Rv$$

есть левый идеал $L \neq R$. Следовательно, L содержится в максимальном левом идеале $M \neq R$ (в силу леммы Цорна). Тогда M/L есть максимальный подмодуль в R/L (не равный R/L) и, следовательно, Mv — максимальный подмодуль в Rv, не равный Rv и соответствующий M/L при изоморфизме

$$R/L \to Rv.$$

Мы можем записать $E = Mv \oplus M'$ для некоторого подмодуля M'. Тогда $Rv = Mv \oplus (M' \cap Rv)$, поскольку всякий элемент $x \in Rv$ может быть однозначно записан в виде суммы $x = \alpha v + x'$, где $\alpha \in R$ и $x' \in M'$, причем, очевидно, $x' = x - \alpha v$ лежит в Rv. Так как Mv максимален в Rv, то модуль $M' \cap Rv$ простой, что и требовалось установить.

Пусть E_0 — подмодуль в E, являющийся суммой всех простых подмодулей модуля E. Если $E_0 \neq E$, то $E = E_0 \oplus F$, где $F \neq 0$, а потому существует простой подмодуль в F вопреки определению E_0. Это доказывает, что ПП 3 влечет ПП1.

Модуль E, удовлетворяющий нашим трем условиям, называется *полупростым*.

Предложение 3. *Всякий подмодуль и всякий фактормодуль полупростого модуля полупросты.*

Доказательство. Пусть F — подмодуль и F_0 — сумма всех простых подмодулей в F. Запишем $E = F_0 \oplus F_0'$. Всякий элемент x из F имеет единственное представление $x = x_0 + x_0'$, где $x_0 \in F_0$ и $x_0' \in F_0'$. Но $x_0' = x - x_0 \in F$. Следовательно, F есть прямая сумма

$$F = F_0 \oplus (F \cap F_0').$$

Отсюда видно, что F_0 совпадает с F, который тем самым полупрост. Что касается фактормодуля, то запишем $E = F \oplus F'$. Тогда F' есть сумма своих простых подмодулей и каноническое отображение $E \to E/F$ индуцирует изоморфизм F' на E/F. Следовательно, модуль E/F полупрост.

§ 3. Теорема плотности

Пусть E — полупростой R-модуль. Обозначим через K кольцо $\mathrm{End}_R(E)$. Тогда E будет также K-модулем, причем действие K на E задается отображением

$$(\varphi, x) \mapsto \varphi(x),$$

где $\varphi \in K$ и $x \in E$. Всякий элемент $\alpha \in R$ посредством отображения $f_\alpha(x) = \alpha x$ индуцирует K-гомоморфизм f_α: $E \to E$. Но именно это и означает условие

$$\varphi(\alpha x) = \alpha \varphi(x).$$

Таким образом, мы получаем гомоморфизм колец

$$R \to \mathrm{End}_K(E).$$

Возникает вопрос, насколько велик образ этого гомоморфизма. Теорема плотности утверждает, что он весьма большой.

Лемма. *Пусть E — полупростой модуль над R, $K = \mathrm{End}_R(E)$, $f \in \mathrm{End}_K(E)$, $x \in E$. Существует элемент $\alpha \in R$, такой, что $\alpha x = f(x)$.*