*скажем* $L_1, \ldots, L_s$. *Если* $R_i = \sum\limits_{L \approx L_i} L$ — *сумма всех простых левых идеалов, изоморфных* $L_i$, *то* $R_i$ — *двусторонний идеал, который является также кольцом (с операциями, индуцированными* $R$), *и кольцо* $R$ *изоморфно прямому произведению*

$$R = \prod_{i=1}^{s} R_i.$$

*Каждое* $R_i$ *является простым кольцом. Если* $e_i$ — *его единичный элемент, то* $1 = e_1 + \ldots + e_s$ *и* $R_i = Re_i$. *Далее,* $e_i e_j = 0$ *при* $i \neq j$ [1]).

Перейдем теперь к модулям.

Теорема 3. *Пусть* $R$ — *полупростое кольцо и* $E$ — $R$-*модуль* $\neq 0$. *Тогда*

$$E = \coprod_{i=1}^{s} R_i E = \coprod_{i=1}^{s} e_i E,$$

*причем* $R_i E$ — *подмодуль в* $E$, *равный сумме всех простых подмодулей, изоморфных* $L_i$.

Доказательство. Пусть $E_i$ — сумма всех простых подмодулей в $E$, изоморфных $L_i$. Если $V$ — простой подмодуль в $E$, то $RV = V$ и, следовательно, $L_i V = V$ для некоторого $i$. В силу предыдущей леммы имеем $L_i \approx V$. Следовательно, $E$ есть прямая сумма $E_1, \ldots, E_s$. Наконец, ясно, что $R_i E = E_i$.

Следствие 1. *Пусть кольцо* $R$ *полупросто. Тогда всякий простой модуль изоморфен одному из простых левых идеалов* $L_i$.

Следствие 2. *Простое кольцо имеет с точностью до изоморфизма только один простой модуль.*

Оба эти следствия непосредственно вытекают из теорем 2 и 3.

## § 5. Простые кольца

Лемма. *Пусть* $R$ — *кольцо и* $\psi \in \mathrm{End}_R(R)$ — *гомоморфизм кольца* $R$, *рассматриваемого как* $R$-*модуль, в себя. Тогда существует элемент* $\alpha \in R$, *такой, что* $\psi(x) = x\alpha$ *для всех* $x \in R$.

Доказательство. Имеем $\psi(x) = \psi(x \cdot 1) = x\psi(1)$. Положим $\alpha = \psi(1)$.

---

[1]) Там, где идеалы $R_i$ явно не указываются, мы будем называть $e_i$ *идемпотентными* элементами, чтобы избежать путаницы с единицами в $R$. — *Прим. ред.*

Теорема 4. *Пусть $R$ — простое кольцо. Тогда $R$ — конечная прямая сумма простых левых идеалов. В $R$ нет двусторонних идеалов, кроме $0$ и $R$. Если $L$, $M$ — простые левые идеалы, то существует элемент $\alpha \in R$, такой, что $L\alpha = M$. При этом $LR = R$.*

Доказательство. Так как кольцо $R$ по определению полупросто, то оно является прямой суммой простых левых идеалов, скажем $\coprod_{j \in J} L_j$. Мы можем представить 1 в виде конечной суммы

$1 = \sum_{j=1}^{m} \beta_j$, где $\beta_j \in L_j$. Тогда

$$R = \coprod_{j=1}^{m} R\beta_j = \coprod_{j=1}^{m} L_j.$$

Это доказывает наше первое утверждение. Что касается второго утверждения, то оно есть следствие третьего. Пусть, таким образом, $L$ — простой левый идеал. Имеем разложение в прямую сумму $R = L \oplus L'$. Пусть $\pi$: $R \to L$ — проекция. Это $R$-эндоморфизм. Пусть $M$ — любой другой простой левый идеал и $\sigma$: $L \to M$ — изоморфизм (существующий по определению простого кольца). Тогда отображение $\sigma \circ \pi$: $R \to R$ есть $R$-эндоморфизм. В силу леммы существует элемент $\alpha \in R$, такой, что

$$\sigma \circ \pi(x) = x\alpha \quad \text{для всех} \quad x \in R.$$

Применим это к элементу $x \in L$. Найдем

$$\sigma(x) = x\alpha \quad \text{для всех} \quad x \in L.$$

Отображение $x \mapsto x\alpha$ есть ненулевой $R$-гомоморфизм $L$ в $M$ и, следовательно, изоморфизм. Отсюда тотчас вытекает, что $LR = R$, и наша теорема тем самым доказана.

Следствие. *Пусть $R$ — простое кольцо, $L$ — его простой левый идеал и $E$ — простой $R$-модуль. Тогда $LE = E$ и модуль $E$ точный.*

Доказательство. Имеем $LE = L(RE) = (LR)E = RE = E$. Допустим, что $\alpha E = 0$ для некоторого $\alpha \in R$. Тогда $R\alpha RE = R\alpha E = 0$. Но $R\alpha R$ — двусторонний идеал. Следовательно, $R\alpha R = 0$ и $\alpha = 0$. Это доказывает, что модуль $E$ точный.

Теорема 5 (Риффель). *Пусть $R$ — кольцо, не содержащее двусторонних идеалов, отличных от $0$ и $R$. Пусть $L$ — левый идеал, $R' = \mathrm{End}_R(L)$ и $R'' = \mathrm{End}_{R'}(L)$. Тогда естественное отображение $\lambda$: $R \to R''$ является изоморфизмом.*

Доказательство. Ядро $\lambda$ — двусторонний идеал, так что отображение $\lambda$ инъективно. Так как $LR$ — двусторонний идеал, то $LR = R$ и $\lambda(L)\lambda(R) = \lambda(R)$. Для любых $x, y \in L$ и $f \in R''$ имеем $f(xy) = f(x)y$, поскольку правое умножение на $y$ является $R$-эндоморфизмом $L$. Следовательно, $\lambda(L)$ — левый идеал в $R''$, так что

$$R'' = R''\lambda(R) = R''\lambda(L)\lambda(R) = \lambda(L)\lambda(R) = \lambda(R),$$

что и требовалось доказать.

Теорема 5 показывает, что $R$ можно представить как кольцо эндоморфизмов некоторого конечномерного модуля над телом. Обратно:

Теорема 6. *Пусть $D$ — тело, $E$ — конечномерное векторное пространство над $D$ и $R = \mathrm{End}_D(E)$. Тогда кольцо $R$ — простое и $E$ — простой $R$-модуль. Кроме того, $D = \mathrm{End}_R(E)$.*

Доказательство. Покажем сначала, что $E$ — простой $R$-модуль. Пусть $v \in E$, $v \neq 0$. Тогда элемент $v$ может быть дополнен до базиса $E$ над $D$ и, значит, для заданного $w \in E$ существует элемент $\alpha \in R$, такой, что $\alpha v = w$. Следовательно, $E$ не может содержать никакого инвариантного подпространства, кроме 0 и самого себя, т. е. $E$ просто над $R$. Ясно, что $E$ — точный модуль над $R$. Пусть $\{v_1, \ldots, v_m\}$ — базис $E$ над $D$. Отображение

$$\alpha \longmapsto (\alpha v_1, \ldots, \alpha v_m)$$

кольца $R$ в $E^{(m)}$ является инъективным $R$-гомоморфизмом $R$ в $E^{(m)}$. Для заданных $(w_1, \ldots, w_m) \in E^{(m)}$ существует элемент $\alpha \in R$, такой, что $\alpha v_i = w_i$, и, следовательно, кольцо $R$ $R$-изоморфно $E^{(m)}$. Это показывает, что $R$ (как $R$-модуль над собой) изоморфно прямой сумме простых модулей, а потому полупросто. Далее, все эти простые модули изоморфны друг другу и, значит, в силу теоремы 2 кольцо $R$ простое.

Остается доказать, что $D = \mathrm{End}_R(E)$. Заметим, что $E$ — полупростой модуль над $D$, так как в векторном пространстве всякое подпространство обладает дополнительным подпространством. Мы можем поэтому применить теорему плотности ($R$ и $D$ теперь поменялись ролями!). Пусть $\varphi \in \mathrm{End}_R(E)$ и $v \in E$, $v \neq 0$. В силу теоремы плотности существует элемент $a \in D$, такой, что $\varphi(v) = av$. Пусть $w \in E$. Существует элемент $f \in R$, такой, что $f(v) = w$. Тогда

$$\varphi(w) = \varphi(f(v)) = f(\varphi(v)) = f(av) = af(v) = aw.$$

Таким образом, $\varphi(w) = aw$ для всех $w \in E$. Это означает, что $\varphi \in D$, что и завершает наше доказательство.

Теорема 7. *Пусть $k$ — поле, $E$ — конечномерное векторное пространство размерности $m$ над $k$ и $R = \mathrm{End}_k(E)$. Тогда*

*$R$ — $k$-пространство и*

$$\dim_k R = m^2.$$

*Кроме того, $m$ есть число простых левых идеалов, содержащихся в произвольном разложении $R$ в прямую сумму таких идеалов.*

Доказательство. Пространство $k$-эндоморфизмов $k$-пространства $E$ представляется пространством матриц размера $m \times m$ над $k$, так что размерность $R$ как $k$-пространства равна $m^2$. С другой стороны, доказательство теоремы 6 показывает, что $R$ как $R$-модуль $R$-изоморфен прямой сумме $E^{(m)}$. Но однозначность разложения модуля в прямую сумму простых модулей нам известна (предложение 2 § 1), что и доказывает наше утверждение.

Мы видим, что в терминологии § 1 целое число $m$, о котором идет речь в теореме 7, есть длина $R$.

Мы можем отождествить $R = \mathrm{End}_k(E)$ с кольцом матриц $\mathrm{Mat}_m(k)$, как только выбран базис $E$. В этом случае мы можем взять в качестве простых левых идеалов идеалы $L_i$ ($i = 1, \ldots, m$), состоящие из матриц с единственным ненулевым $i$-м столбцом. Элементы из $L_1$ выглядят, например, так:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ a_{21} & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{m1} & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$

Мы видим, что $R$ есть прямая сумма $m$ столбцов.

Отметим также, что теорема 6 приводит к следующему утверждению: *если матрица $M \in \mathrm{Mat}_m(k)$ коммутирует со всеми элементами из $\mathrm{Mat}_m(k)$, то $M$ — скалярная матрица.*

Действительно, такая матрица $M$ может рассматриваться как $R$-эндоморфизм $E$, а мы в силу теоремы 6 знаем, что всякий такой эндоморфизм лежит в $k$. Разумеется, этот факт легко можно проверить также прямым вычислением.

## § 6. Сбалансированные модули

Пусть $R$ — кольцо и $E$ — модуль. Положим $R'(E) = \mathrm{End}_R(E)$ и $R''(E) = \mathrm{End}_{R'}(E)$. Пусть $\lambda$: $R \to R''$ — естественный гомоморфизм, при котором $\lambda_x(v) = xv$ для $x \in R$ и $v \in E$. Если $\lambda$ — изоморфизм, то мы будем говорить, что модуль $E$ — *сбалансированный*. Мы будем говорить, что модуль $E$ — *образующий* (для $R$-модулей), если всякий модуль является гомоморфным образом (возможно, бесконечной)