

R — k -пространство и

$$\dim_k R = m^2.$$

Кроме того, m есть число простых левых идеалов, содержащихся в произвольном разложении R в прямую сумму таких идеалов.

Доказательство. Пространство k -эндоморфизмов k -пространства E представляется пространством матриц размера $m \times m$ над k , так что размерность R как k -пространства равна m^2 . С другой стороны, доказательство теоремы 6 показывает, что R как R -модуль R -изоморfen прямой сумме $E^{(m)}$. Но однозначность разложения модуля в прямую сумму простых модулей нам известна (предложение 2 § 1), что и доказывает наше утверждение.

Мы видим, что в терминологии § 1 целое число m , о котором идет речь в теореме 7, есть длина R .

Мы можем отождествить $R = \text{End}_k(E)$ с кольцом матриц $\text{Mat}_m(k)$, как только выбран базис E . В этом случае мы можем взять в качестве простых левых идеалов идеалы L_i ($i = 1, \dots, m$), состоящие из матриц с единственным ненулевым i -м столбцом. Элементы из L_1 выглядят, например, так:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Мы видим, что R есть прямая сумма m столбцов.

Отметим также, что теорема 6 приводит к следующему утверждению: если матрица $M \in \text{Mat}_m(k)$ коммутирует со всеми элементами из $\text{Mat}_m(k)$, то M — скалярная матрица.

Действительно, такая матрица M может рассматриваться как R -эндоморфизм E , а мы в силу теоремы 6 знаем, что всякий такой эндоморфизм лежит в k . Разумеется, этот факт легко можно проверить также прямым вычислением.

§ 6. Сбалансированные модули

Пусть R — кольцо и E — модуль. Положим $R'(E) = \text{End}_R(E)$ и $R''(E) = \text{End}_{R'}(E)$. Пусть $\lambda: R \rightarrow R''$ — естественный гомоморфизм, при котором $\lambda_x(v) = xv$ для $x \in R$ и $v \in E$. Если λ — изоморфизм, то мы будем говорить, что модуль E — *сбалансированный*. Мы будем говорить, что модуль E — *образующий* (для R -модулей), если всякий модуль является гомоморфным образом (возможно, бесконечной)

прямой суммы модуля E с собой. Если E — образующий, то существует сюръективный гомоморфизм $E^{(n)} \rightarrow R$ (мы можем взять n конечным, так как R конечно порождено одним элементом 1).

Теорема 8 (Морита). *Всякий образующий E сбалансирован и конечно порожден над $R'(E)$.*

Доказательство (Фейт). Докажем сначала, что для любого модуля F модуль $R \oplus F$ сбалансирован. Отождествляем R и F в $R \oplus F$ с подмодулями $R \oplus 0$ и $0 \oplus F$ соответственно. Для $w \in F$ пусть $\psi_w: R \oplus F \rightarrow R \oplus F$ — отображение, при котором $\psi_w(x+v) = xw$. Тогда любой элемент $f \in R''(R \oplus F)$ коммутирует с π_1, π_2 и с каждым ψ_w . Отсюда мы тотчас заключаем, что $f(x+v) = f(1)(x+v)$ и что, следовательно, $R \oplus F$ — сбалансированный. Пусть E — образующий и $E^{(n)} \rightarrow R$ — сюръективный гомоморфизм. Так как R — свободный модуль, то $E^{(n)} \approx R \oplus F$ для некоторого модуля F , так что $E^{(n)}$ — сбалансированный. Пусть $g \in R''(E)$. Тогда $g^{(n)}$ коммутирует со всяkim элементом $\varphi = (\varphi_{ij})$ из $R'(E^{(n)})$ (с компонентами $\varphi_{ij} \in R'(E)$) и, следовательно, существует некоторый $x \in R$, такой, что $g^{(n)} = \lambda_x^{(n)}$. Следовательно, $g = \lambda_x$, чем доказано, что E — сбалансированный, поскольку λ , очевидно, инъективно.

Чтобы доказать, что E конечно порожден над $R'(E)$, рассмотрим изоморфизмы аддитивных групп

$$R'(E)^{(n)} \approx \text{Hom}_R(E^{(n)}, E) \approx \text{Hom}_R(R, E) \oplus \text{Hom}_R(F, E).$$

Они будут также, очевидно, изоморфизмами R' -модулей, если мы определим операцию из R' как композицию отображений (слева). Так как модуль $\text{Hom}_R(R, E)$ R' -изоморчен E относительно отображения $h \mapsto h(1)$, то E является R' -гомоморфным образом модуля $R'^{(n)}$ и, следовательно, конечно порожден над R' , что и доказывает теорему.

ПРИМЕР. Пусть R — кольцо, не содержащее двусторонних идеалов, отличных от 0 и R . Если L — левый идеал $\neq 0$, то L — образующий, так как $LR = R$ и, следовательно, $R = \sum La_i$ для подходящих элементов $a_i \in R$. Таким образом, теорема 5 является следствием теоремы 8.

УПРАЖНЕНИЯ

1. (а) Назовем *радикалом* кольца R левый идеал N , являющийся пересечением всех максимальных левых идеалов в R . Показать, что $NE = 0$ для всякого простого R -модуля E . Показать, что N — двусторонний идеал.
 (б) Показать, что радикал кольца R/N равен 0.

2. Кольцо называется *артиновым*, если всякая убывающая последовательность левых идеалов $a_1 \supseteq a_2 \supseteq \dots$, где $a_i \neq a_{i+1}$, конечна. (а) Показать, что всякая конечномерная алгебра над полем артингова. (б) Показать,

что если кольцо R артиново, то всякий ненулевой левый идеал содержит простой левый идеал. (в) Показать, что в артиновом кольце R всякое непустое множество идеалов содержит минимальный идеал.

3. Пусть R — артиново кольцо, причем его радикал равен 0. Показать, что R полупросто. [Указание: получить вложение R в прямую сумму $\prod R/M_i$, где $\{M_i\}$ — конечное множество максимальных левых идеалов.]

4. Пусть R — произвольное кольцо, M — конечно порожденный модуль и N — радикал в R . Показать, что если $NM = M$, то $M = 0$. [Указание: заметить, что сохраняет силу доказательство леммы Накаямы.]

5. Пусть R — артиново кольцо. Показать, что его радикал нильпотентен, т. е. что существует целое число $r \geq 1$, для которого $N^r = 0$. [Указание: рассмотреть убывающую последовательность степеней N^r и применить лемму Накаямы к надлежащему выбранному подмодулю в N^∞ .]

6. Пусть R — полупростое коммутативное кольцо. Показать, что R — прямое произведение полей.

7. Пусть R — конечномерная коммутативная алгебра над полем k . Показать, что если R не содержит нильпотентных элементов $\neq 0$, то R — полупростая.

8. (Колчин). Пусть $E \neq 0$ — конечномерное векторное пространство над полем k и G — подгруппа в $GL(E)$, такая, что всякий элемент $A \in G$ имеет вид $I + N$, где N — нильпотентный эндоморфизм. Показать, что существует элемент $v \in E$, $v \neq 0$, такой, что $Av = v$ для всех $A \in G$. [Указание: во-первых, свести вопрос к случаю, когда k алгебраически замкнуто, показав, что задача равносильна разрешимости некоторой системы линейных уравнений. Во-вторых, свести задачу к случаю, когда E — простой $k[G]$ -модуль. Комбинируя теорему Бернсайда с тем фактом, что

$$\text{tr}(A) = \text{tr}(I) \quad \text{для всех } A \in G,$$

показать, что если $A_0 \in G$, $A_0 = I + N$, то $\text{tr}(NX) = 0$ для всех $X \in \text{End}_k(E)$ и, следовательно, $N = 0$, $A_0 = I$.]

9. Пусть E — конечномерное векторное пространство над полем k , S — некоторое подмножество в $\text{End}_k(E)$ и $R = k[S]$ — k -алгебра, порожденная элементами из S . Доказать, что следующие условия эквивалентны: алгебра R полупростая; E — полупростой R -модуль.

10. Пусть $A \in \text{End}_k(E)$. Эндоморфизм A называется *полупростым*, если множество, состоящее из одного A , удовлетворяет условиям предыдущего упражнения. Показать, что элемент A из $\text{End}_k(E)$ полупрост в том и только в том случае, если его минимальный многочлен не имеет множителей кратности > 1 над k .

11. Пусть E — конечномерное векторное пространство над полем k , S — коммутативное множество его эндоморфизмов и $R = k[S]$. Предположим, что алгебра R полупроста. Показать, что всякое подмножество из S полупросто.

12. Доказать, что R -модуль E тогда и только тогда является образующим, когда он сбалансирован и как модуль над R' конечно порожден и проективен.