Глава XVIII

Представления конечных групп

§ 1. Полупростота групповой алгебры

Пусть k — поле и G — группа. Образуем групповую алгебру $k[G]$. Как объяснялось в гл. V, § 1, она состоит из всех формальных линейных комбинаций

$$\sum_{\sigma \in G} a_\sigma \sigma$$

с коэффициентами $a_\sigma \in k$, почти все из которых равны 0. Произведение берется естественным образом:

$$\left(\sum_{\sigma \in G} a_\sigma \sigma\right)\left(\sum_{\tau \in G} b_\tau \tau\right) = \sum_{\sigma, \tau} a_\sigma b_\tau \sigma\tau.$$

Пусть E — векторное пространство над k. Всякий гомоморфизм алгебр

$$k[G] \to \mathrm{End}_k(E)$$

индуцирует гомоморфизм групп

$$G \to \mathrm{Aut}_k(E),$$

и таким образом, представление кольца $k[G]$ в E порождает представление группы G. Если задано такое представление, то мы будем также говорить, что $k[G]$ или G *действует* на E. Отметим, что задание представления превращает E в модуль над кольцом $k[G]$.

Обратно, если задано представление группы, скажем $\rho\colon G \to \mathrm{Aut}_k(E)$, то мы можем следующим образом продолжить ρ до представления алгебры $k[G]$. Пусть $\alpha = \sum a_\sigma \sigma$ и $x \in E$. Положим

$$\rho(\alpha)x = \sum a_\sigma \rho(\sigma)x.$$

Непосредственно проверяется, что этим определено продолжение ρ до кольцевого гомоморфизма $k[G]$ в $\mathrm{End}_k(E)$. Мы будем говорить, что представление ρ — *точное* на G, если отображение $\rho\colon G \to \mathrm{Aut}_k(E)$ инъективно. Продолжение ρ на $k[G]$ может, однако, и не быть точным.

Имея дело с фиксированным представлением группы G на E, мы часто будем писать σx вместо $\rho(\sigma)x$. Векторное пространство E

вместе с представлением ρ будет называться *G-модулем* или *G-пространством*, а также *(G, k)-пространством*, если нам захочется специально отметить поле k. Напомним, что если E, F — G-модули, то G-гомоморфизмом называется такое k-линейное отображение $f\colon E \to F$, что $f(\sigma x) = \sigma f(x)$ для всех $x \in E$ и $\sigma \in G$.

Отметим, что ядром заданного G-гомоморфизма $f\colon E \to F$ служит G-подмодуль в E и что k-факторпространство $F/f(E)$ допускает, и притом единственным образом, такое действие G, что каноническое отображение $F \to F/f(E)$ является G-гомоморфизмом.

Если G действует на k-пространствах E и F, то мы можем естественным образом определить действие G на $\mathrm{Hom}_k(E, F)$. Действительно, положим для $f \in \mathrm{Hom}_k(E, F)$ и $\sigma \in G$

$$(\sigma f)(x) = \sigma(f(\sigma^{-1}x)).$$

Тогда $(\sigma\tau)f = \sigma(\tau(f))$. Чтобы не произошло путаницы с композицией σ и f, мы, когда нам потребуется иметь дело с такой итерацией, будем писать $\sigma \circ f$ для обозначения отображения $x \mapsto \sigma(f(x))$ и аналогично $f \circ \sigma$. Отметим, что f является G-гомоморфизмом в том и только в том случае, если $\sigma f = f$ для всех $\sigma \in G$.

Пусть E — G-модуль. Мы будем обозначать через E^G подмодуль, состоящий из всех элементов $x \in E$, таких, что $\sigma x = x$ для всех $\sigma \in G$.

Под *тривиальным* представлением $\rho\colon G \to \mathrm{Aut}_k(E)$ мы будем понимать представление, при котором $\rho(G) = 1$. Представление тривиально тогда и только тогда, когда $\sigma x = x$ для всех $x \in E$ и всех $\sigma \in G$. В этом случае мы будем также говорить, что *G действует тривиально*. Это можно еще записать в виде $E = E^G$.

Пусть G — конечная группа и E — G-модуль. Мы можем определить операцию $\mathrm{Tr}_G\colon E \to E$, являющуюся k-гомоморфизмом, а именно положив

$$\mathrm{Tr}_G(x) = \sum_{\sigma \in G} \sigma x.$$

Отметим, что элементы $\mathrm{Tr}_G(x)$ лежат в E^G, т. е. неподвижны относительно действия всех элементов G. Действительно,

$$\tau\,\mathrm{Tr}_G(x) = \sum_{\sigma \in G} \tau\sigma x,$$

а умножение слева на τ лишь переставляет элементы из G.

Если, в частности, $f\colon E \to F$ — k-гомоморфизм G-модулей, то $\mathrm{Tr}_G(f)\colon E \to F$ является G-гомоморфизмом.

Предложение 1. *Пусть G — конечная группа, E', E, F, F' — G-модули и*

$$E' \xrightarrow{\varphi} E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{\psi} F'$$

— k-гомоморфизмы, причем φ, ψ — G-гомоморфизмы. Тогда

$$\mathrm{Tr}_G(\psi \circ f \circ \varphi) = \psi \circ \mathrm{Tr}_G(f) \circ \varphi.$$

Доказательство. Имеем

$$\mathrm{Tr}_G(\psi \circ f \circ \varphi) = \sum_{\sigma \in G} \sigma(\psi \circ f \circ \varphi) = \sum_{\sigma \in G} (\sigma\psi) \circ (\sigma f) \circ (\sigma\varphi) =$$
$$= \psi \circ \left(\sum_{\sigma \in G} \sigma f\right) \circ \varphi = \psi \circ \mathrm{Tr}_G(f) \circ \varphi.$$

Теорема 1 (Машке). *Пусть G — конечная группа порядка n и k — поле, характеристика которого не делит n. Тогда групповое кольцо $k[G]$ полупросто.*

Доказательсто. Пусть E — G-модуль и F — G-подмодуль. Так как k — поле, то существует k-подпространство F', такое, что E будет k-прямой суммой F и F'. Проекция на F есть k-линейное отображение π: $E \to F$. Очевидно, $\pi(x) = x$ для всех $x \in F$. Положим

$$\varphi = \frac{1}{n} \mathrm{Tr}_G(\pi).$$

Имеем два G-гомоморфизма

$$0 \to F \underset{\varphi}{\overset{j}{\rightleftarrows}} E,$$

причем j — вложение и $\varphi \circ j = \mathrm{id}$. Отсюда вытекает, что E есть G-прямая сумма F и $\mathrm{Ker}\,\varphi$, чем и доказано, что $k[G]$ полупросто.

Во всем последующем мы будем предполагать, что G — конечная группа и что все векторные пространства E над k конечномерны. Через n мы обычно обозначаем порядок группы G. Всюду предполагается, что характеристика поля k не делит n.

§ 2. *Характеры*

Пусть ρ: $k[G] \to \mathrm{End}_k(E)$ — некоторое представление. Под *характером* χ_ρ этого представления мы будем понимать k-значную функцию

$$\chi_\rho\colon\ k[G] \to k,$$

такую, что $\chi_\rho(\alpha) = \mathrm{tr}\,\rho(\alpha)$ для всех $\alpha \in k[G]$. След здесь — это след эндоморфизма, определенный в гл. XIII, § 2. При выбранном базисе для E над k он равен следу матрицы, представляющей $\rho(\alpha)$, т. е. сумме ее диагональных элементов. Как мы уже видели раньше, след не зависит от выбора базиса. Иногда мы вместо χ_ρ будем писать χ_E.

Мы будем также называть E *пространством представления* ρ.