*— $k$-гомоморфизмы, причем $\varphi$, $\psi$ — $G$-гомоморфизмы. Тогда*

$$\mathrm{Tr}_G(\psi \circ f \circ \varphi) = \psi \circ \mathrm{Tr}_G(f) \circ \varphi.$$

Доказательство. Имеем

$$\mathrm{Tr}_G(\psi \circ f \circ \varphi) = \sum_{\sigma \in G} \sigma(\psi \circ f \circ \varphi) = \sum_{\sigma \in G} (\sigma\psi) \circ (\sigma f) \circ (\sigma\varphi) =$$
$$= \psi \circ \left( \sum_{\sigma \in G} \sigma f \right) \circ \varphi = \psi \circ \mathrm{Tr}_G(f) \circ \varphi.$$

Теорема 1 (Машке). *Пусть $G$ — конечная группа порядка $n$ и $k$ — поле, характеристика которого не делит $n$. Тогда групповое кольцо $k[G]$ полупросто.*

Доказательсто. Пусть $E$ — $G$-модуль и $F$ — $G$-подмодуль. Так как $k$ — поле, то существует $k$-подпространство $F'$, такое, что $E$ будет $k$-прямой суммой $F$ и $F'$. Проекция на $F$ есть $k$-линейное отображение $\pi$: $E \to F$. Очевидно, $\pi(x) = x$ для всех $x \in F$. Положим

$$\varphi = \frac{1}{n} \mathrm{Tr}_G(\pi).$$

Имеем два $G$-гомоморфизма

$$0 \to F \underset{\varphi}{\overset{j}{\rightleftarrows}} E,$$

причем $j$ — вложение и $\varphi \circ j = \mathrm{id}$. Отсюда вытекает, что $E$ есть $G$-прямая сумма $F$ и $\mathrm{Ker}\,\varphi$, чем и доказано, что $k[G]$ полупросто.

*Во всем последующем мы будем предполагать, что $G$ — конечная группа и что все векторные пространства $E$ над $k$ конечномерны. Через $n$ мы обычно обозначаем порядок группы $G$. Всюду предполагается, что характеристика поля $k$ не делит $n$.*

## § 2. *Характеры*

Пусть $\rho$: $k[G] \to \mathrm{End}_k(E)$ — некоторое представление. Под *характером* $\chi_\rho$ этого представления мы будем понимать $k$-значную функцию

$$\chi_\rho\colon\ k[G] \to k,$$

такую, что $\chi_\rho(\alpha) = \mathrm{tr}\,\rho(\alpha)$ для всех $\alpha \in k[G]$. След здесь — это след эндоморфизма, определенный в гл. XIII, § 2. При выбранном базисе для $E$ над $k$ он равен следу матрицы, представляющей $\rho(\alpha)$, т. е. сумме ее диагональных элементов. Как мы уже видели раньше, след не зависит от выбора базиса. Иногда мы вместо $\chi_\rho$ будем писать $\chi_E$.

Мы будем также называть $E$ *пространством представления* $\rho$.

Под *тривиальным* (или *единичным*) *характером* мы будем понимать характер представления группы $G$ на $k$-пространстве, равном самому $k$, при котором $\sigma x = x$ для всех $x \in k$. Это функция, принимающая значение 1 на всех элементах из $G$. Мы будем обозначать ее через $\chi_0$, а также через $1_G$, если нам нужно будет подчеркнуть зависимость от $G$.

Отметим, что характеры являются функциями на $G$ и что значения характера на элементах из $k[G]$ определяются его значениями на $G$ (продолжение с $G$ на $k[G]$ производится по $k$-линейности).

Мы будем говорить, что два представления $\rho$, $\varphi$ группы $G$ на пространствах $E$, $F$ *изоморфны*, если между $E$ и $F$ существует $G$-изоморфизм. Очевидно, что если $\rho$, $\varphi$ — изоморфные представления, то их характеры равны. (Иными словами, если $E$, $F$ суть $G$-изоморфные $G$-пространства, то $\chi_E = \chi_F$.) Во всем дальнейшем мы будем интересоваться только классами представлений относительно изоморфизма.

Если $E$, $F$ — $G$-пространства, то их прямая сумма $E \oplus F$ также является $G$-пространством с покомпонентным действием $G$. Если $x \oplus y \in E \oplus F$, где $x \in E$ и $y \in F$, то $\sigma(x \oplus y) = \sigma x \oplus \sigma y$.

Аналогично тензорное произведения $E \otimes_k F = E \otimes F$ есть $G$-пространство с действием $G$, задаваемым формулой $\sigma(x \otimes y) = \sigma x \otimes \sigma y$.

Предложение 2. *Для любых $G$-пространств $E$, $F$*

$$\chi_E + \chi_F = \chi_{E \oplus F} \quad \text{и} \quad \chi_E \chi_F = \chi_{E \otimes F}.$$

Доказательство. Первое соотношение выполняется ввиду того, что матрица элемента $\sigma$ в представлении $E \oplus F$ разлагается на блоки, соответствующие представлению в $E$ и представлению в $F$. Что касается второго соотношения, то, как мы знаем $\{v_i \otimes w_j\}$ — базис $E \otimes F$, где $\{v_i\}$ — базис $E$ и $\{w_j\}$ — базис $F$ над $k$. Пусть $(a_{\nu i})$ — матрица элемента $\sigma$ относительно базиса пространства $E$ и $(b_{\mu j})$ — его матрица относительно базиса пространства $F$. Тогда

$$\sigma(v_i \otimes w_j) = \sigma v_i \otimes \sigma w_j = \sum_{\nu} a_{\nu i} v_\nu \otimes \sum_{\mu} b_{\mu j} w_\mu = \\ = \sum_{\nu, \mu} a_{\nu i} b_{\mu j} v_\nu \otimes w_\mu.$$

По определению

$$\chi_{E \otimes F}(\sigma) = \sum_i \sum_j a_{ii} b_{jj} = \chi_E(\sigma)\, \chi_F(\sigma),$$

что и доказывает наше предложение.

Пусть $\rho\colon G \to \operatorname{Aut}_k(E)$ и $\varphi\colon G \to \operatorname{Aut}_k(F)$ — представления $G$ на $E$ и $F$ соответственно. Мы определяем сумму $\rho + \varphi$ как описанное выше представление на $E \oplus F$. Очевидно, что сумма характеров есть характер суммы представлений. В частности, характеры $G$, ассоциированные с представлениями $G$ на $k$-пространствах, образуют моноид.

Аналогично мы определяем произведение $\rho \otimes \varphi$ как представление, ассоциированное с тензорным произведением пространств представления для $\rho$ и $\varphi$ соответственно. Таким образом, аддитивный моноид характеров, ассоциированных с представлениями, обладает мультипликативной структурой, которая дистрибутивна по отношению к сложению.

До сих пор у нас фигурировало понятие характера, ассоциированного с представлением. Естественно теперь рассматривать линейные комбинации таких характеров не только с положительными целочисленными коэффициентами. Таким образом, под (*обобщенным*) *характером* группы $G$ мы будем понимать всякую функцию на $G$, которая может быть записана в виде линейной комбинации характеров представлений с произвольными целочисленными коэффициентами. Характеры, ассоциированные с представлениями, будут называться *собственными характерами*. Все, что мы определили, зависит, конечно, от поля $k$, и если нам будет нужно специально отметить поле $k$, мы будем к нашим высказываниям добавлять „*над* $k$".

Заметим, что, согласно предложению 2, характеры образуют кольцо. В дальнейшем мы будем использовать преимущественно аддитивную, а не мультипликативную структуру.

Под *простым* (или *неприводимым*) *характером* группы $G$ понимают характер простого представления (т. е. характер, ассоциированный с простым $k[G]$-модулем).

Принимая во внимание теорему 1 и результаты предыдущей главы, касающиеся структуры простых и полупростых модулей над полупростым кольцом (гл. XVII, § 4), получаем следующее утверждение.

Теорема 2. *Существует лишь конечное число простых характеров группы $G$ (над $k$). Характеры представлений $G$ являются линейными комбинациями простых характеров с целочисленными коэффициентами* $\geqslant 0$.

Мы будем использовать разложение полупростого кольца в прямое произведение

$$k[G] = \prod_{i=1}^{s} R_i,$$

где каждое $R_i$ — простое кольцо. Мы имеем также соответствующее разложение единичного элемента из $k[G]$

$$1 = e_1 + \ldots + e_s.$$

где $e_i$ — единичный элемент из $R_i$ и $e_i e_j = 0$ при $i \neq j$. Точно так же $R_i R_j = 0$ при $i \neq j$. *Отметим, что $s = s(k)$ зависит от $k$.*

Если $L_i$ — какой-нибудь типический простой модуль для $R_i$ (скажем, один из простых левых идеалов), то мы обозначаем через $\chi_i$ характер представления на $L_i$.

*Заметим, что $\chi_i(\alpha) = 0$ для всех $\alpha \in R_j$ при $i \neq j$. Это фундаментальное соотношение ортогональности, и, хотя оно и очевидно, из него будут следовать все наши другие соотношения.*

Теорема 3. *Предположим, что $k$ имеет характеристику 0. Тогда всякий собственный характер имеет единственное представление в виде линейной комбинации*

$$\chi = \sum_{i=1}^{s} n_i \chi_i, \qquad n_i \in \mathbf{Z}, \ n_i \geqslant 0,$$

*где $\chi_1, \ldots, \chi_s$ — простые характеры $G$ над $k$. Два представления изоморфны в том и только в том случае, если ассоциированные с ними характеры равны.*

Доказательство. Пусть $E$ — пространство представления характера $\chi$. Тогда в силу теоремы 3 из гл. XVII, § 4,

$$E \approx \coprod_{i=1}^{s} n_i L_i.$$

Сумма конечная, поскольку мы неизменно предполагаем, что $E$ конечномерно. Так как $e_i$ действует на $L_i$ как единичный элемент, то

$$\chi_i(e_i) = \dim_k L_i.$$

Мы уже видели, что $\chi_i(e_j) = 0$, если $i \neq j$. Следовательно,

$$\chi(e_i) = n_i \dim_k L_i.$$

Так как $\dim_k L_i$ зависит только от структуры групповой алгебры, то мы получили способ находить значения кратностей $n_i$. А именно, $n_i$ — число раз, с которым $L_i$ входит (с точностью до изоморфизма) в пространство представления характера $\chi$, — равно значению $\chi(e_i)$, разделенному на $\dim_k L_i$ (мы находимся в характеристике 0). Это доказывает нашу теорему.

Мы называем числа $n_i$, участвующие в теореме 3, *кратностями* $\chi_i$ в $\chi$.

В обоих следствиях мы продолжаем предполагать, что $k$ имеет характеристику 0.

Следствие 1. *Простые характеры*

$$\chi_1, \ldots, \chi_s$$

*как функции на $G$ со значениями в $k$ линейно независимы над $k$.*

Доказательство. Предположим, что $\sum a_i\chi_i = 0$, где $a_i \in k$. Применив это выражение к $e_j$, получим

$$0 = \left(\sum a_i\chi_i\right)(e_j) = a_j \dim_k L_j.$$

Следовательно, $a_j = 0$ для всех $j$.

*В случае характеристики* 0 мы называем *размерностью* собственного характера размерность ассоциированного пространства представления.

Следствие 2. *Функция* dim *есть гомоморфизм моноида собственных характеров в* $\mathbf{Z}$.

Пример. Пусть $G$ — циклическая группа с образующей $\sigma$, порядок которой равен простому числу $p$. Рассмотрим групповую алгебру $\mathbf{Q}[G]$. Пусть

$$e_1 = \frac{1 + \sigma + \sigma^2 + \ldots + \sigma^{p-1}}{p}, \quad e_2 = 1 - e_1.$$

Тогда $\tau e_1 = e_1$ для любого $\tau \in G$ и, следовательно, $e_1^2 = e_1$ — идемпотентный элемент. Отсюда вытекает, что $e_2^2 = e_2$ и $e_1 e_2 = 0$. Поле $\mathbf{Q}e_1$ изоморфно $\mathbf{Q}$. Пусть $\omega = \sigma e_2$. Тогда $\omega^p = e_2$. Положим $\mathbf{Q}_2 = \mathbf{Q}e_2$. Так как элемент $\omega \neq e_2$ и удовлетворяет неприводимому уравнению

$$X^{p-1} + \ldots + 1 = 0$$

над $\mathbf{Q}_2$, то $\mathbf{Q}_2(\omega)$ изоморфно полю, полученному присоединением к полю рациональных чисел примитивного корня $p$-й степени из единицы. Следовательно, $\mathbf{Q}[G]$ обладает разложением в прямое произведение

$$\mathbf{Q}[G] \approx \mathbf{Q} \times \mathbf{Q}(\zeta),$$

где $\zeta$ — примитивный корень $p$-й степени из единицы.

В качестве другого примера рассмотрим любую конечную группу $G$. Пусть

$$e_1 = \frac{1}{n} \sum_{\sigma \in G} \sigma.$$

Тогда для любого $\tau \in G$ имеем $\tau e_1 = e_1$ и $e_1^2 = e_1$. Если мы положим $e_1' = 1 - e_1$, то $e_1'^2 = e_1'$ и $e_1' e_1 = e_1 e_1' = 0$. Таким образом, мы получаем, что для любого поля $k$ (характеристика которого, согласно принятым соглашениям, не делит порядок $(G:1)$)

$$k[G] = ke_1 \times k[G]\, e_1'$$

является разложением в прямое произведение. В частности, представление $G$ на самой групповой алгебре $k[G]$ содержит одномерное представление на компоненте $ke_1$ с тривиальным характером.