§ 3. Одномерные представления

Допуская вольность речи, мы будем даже в случае характеристики $p > 0$ говорить, что *характер одномерен*, если он является гомоморфизмом $G \to k^*$.

Предположим, что E — одномерное векторное пространство над k. Пусть

$$\rho\colon G \to \mathrm{Aut}_k(E)$$

— представление и $\{v\}$ — базис E над k. Тогда для всякого $\sigma \in G$ имеем

$$\sigma v = \chi(\sigma) v,$$

где $\chi(\sigma) \in k$ — некоторый элемент, причем $\chi(\sigma) \neq 0$, так как σ индуцирует автоморфизм пространства E. Очевидно,

$$\tau\sigma v = \chi(\sigma)\tau v = \chi(\sigma)\chi(\tau) v = \chi(\tau\sigma) v$$

для любых $\sigma, \tau \in G$. Мы видим, что $\chi\colon G \to k^*$ — гомоморфизм и что наш одномерный характер является объектом той же природы, что и характеры, которые встречались в теореме Артина в теории Галуа.

Обратно, пусть $\chi\colon G \to k^*$ — гомоморфизм и E — одномерное k-пространство с базисом $\{v\}$. Положим $\sigma(av) = a\chi(\sigma) v$ для всех $a \in k$. Тогда видно, что это действие G на E определяет представление группы G, ассоциированным характером которого будет χ.

Так как группа G конечна, то

$$\chi(\sigma)^n = \chi(\sigma^n) = \chi(1) = 1.$$

Следовательно, значениями одномерных характеров являются корни n-й степени из единицы. Все одномерные характеры образуют группу по умножению. Для случая, когда G — конечная абелева группа, мы уже определили ее группу одномерных характеров в гл. I, § 11.

Теорема 4. *Пусть G — конечная абелева группа. Предположим, что поле k алгебраически замкнуто. Тогда всякое простое представление группы G одномерно. Простые характеры G являются гомоморфизмами G в k^*.*

Доказательство. Групповое кольцо $k[G]$ полупросто, коммутативно и является прямым произведением простых колец. Всякое простое кольцо есть кольцо матриц над k (в силу теоремы 5 § 5 предыдущей главы) и может быть коммутативным в том и только в том случае, если оно равно k.

Для всякого одномерного характера χ группы G имеем

$$\chi(\sigma)^{-1} = \chi(\sigma^{-1}).$$

Если k — поле комплексных чисел, то

$$\overline{\chi(\sigma)} = \chi(\sigma)^{-1} = \chi(\sigma^{-1}).$$

Следствие. *Пусть k — алгебраически замкнутое поле, G — конечная группа. Для любого характера χ и любого $\sigma \in G$ значение $\chi(\sigma)$ равно сумме корней из единицы с целочисленными коэффициентами (т. е. с коэффициентами из $\mathbf{Z}$ или $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ в зависимости от характеристики k).*

Доказательство. Пусть H — циклическая подгруппа, порожденная σ. Представление G, имеющее характер χ, можно, беря ограничение, рассматривать как представление для H. Таким образом, наше утверждение вытекает из теоремы 4.

§ 4. Пространство функций классов

Пусть k — некоторое поле, Под *функцией классов* на G (над k или со значениями в k) мы будем понимать функцию $f\colon G \to k$, такую, что $f(\sigma\tau\sigma^{-1}) = f(\tau)$ для всех σ, $\tau \in G$. Таким образом, функция классов может рассматриваться как функция на классах сопряженных элементов. Ясно, что характеры — это функции классов, так как для квадратных матриц

$$\operatorname{tr}(MM'M^{-1}) = \operatorname{tr}(M').$$

Мы всегда будем по линейности расширять область определения функции классов до группового кольца. Если

$$\alpha = \sum_{\sigma \in G} a_\sigma \sigma$$

и f — функция классов, то полагаем

$$f(\alpha) = \sum_{\sigma \in G} a_\sigma f(\sigma).$$

Пусть $\sigma_0 \in G$. Мы пишем $\sigma \sim \sigma_0$, если элемент $\sigma \in G$ сопряжен с σ_0, т. е. если существует элемент τ, для которого $\sigma_0 = \tau\sigma\tau^{-1}$. Элемент группового кольца, имеющий вид

$$\gamma = \sum_{\sigma \sim \sigma_0} \sigma,$$

будет также называться *классом сопряженных элементов.*

Предложение 3. *Пусть k — произвольное поле. Элемент из $k[G]$ тогда и только тогда коммутирует со всяким элементом из G, когда он является линейной комбинацией классов сопряженных элементов.*