

Если k — поле комплексных чисел, то

$$\overline{\chi(\sigma)} = \chi(\sigma)^{-1} = \chi(\sigma^{-1}).$$

Следствие. Пусть k — алгебраически замкнутое поле, G — конечная группа. Для любого характера χ и любого $\sigma \in G$ значение $\chi(\sigma)$ равно сумме корней из единицы с целочисленными коэффициентами (т. е. с коэффициентами из \mathbb{Z} или $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ в зависимости от характеристики k).

Доказательство. Пусть H — циклическая подгруппа, порожденная σ . Представление G , имеющее характер χ , можно, беря ограничение, рассматривать как представление для H . Таким образом, наше утверждение вытекает из теоремы 4.

§ 4. Пространство функций классов

Пусть k — некоторое поле. Под функцией классов на G (над k или со значениями в k) мы будем понимать функцию $f: G \rightarrow k$, такую, что $f(\sigma\tau\sigma^{-1}) = f(\tau)$ для всех $\sigma, \tau \in G$. Таким образом, функция классов может рассматриваться как функция на классах сопряженных элементов. Ясно, что характеры — это функции классов, так как для квадратных матриц

$$\text{tr}(MM'M^{-1}) = \text{tr}(M').$$

Мы всегда будем по линейности расширять область определения функции классов до группового кольца. Если

$$a = \sum_{\sigma \in G} a_{\sigma} \sigma$$

и f — функция классов, то полагаем

$$f(a) = \sum_{\sigma \in G} a_{\sigma} f(\sigma).$$

Пусть $\sigma_0 \in G$. Мы пишем $\sigma \sim \sigma_0$, если элемент $\sigma \in G$ сопряжен с σ_0 , т. е. если существует элемент τ , для которого $\sigma_0 = \tau\sigma\tau^{-1}$. Элемент группового кольца, имеющий вид

$$\gamma = \sum_{\sigma \sim \sigma_0} \sigma,$$

будет также называться классом сопряженных элементов.

Предложение 3. Пусть k — произвольное поле. Элемент из $k[G]$ тогда и только тогда коммутирует со всяkim элементом из G , когда он является линейной комбинацией классов сопряженных элементов.

Доказательство. Пусть $a = \sum_{\sigma \in G} a_\sigma \sigma$, причем $a\tau = \tau a$ для всех $\tau \in G$. Тогда

$$\sum_{\sigma \in G} a_\sigma \tau \sigma^{-1} = \sum_{\sigma \in G} a_\sigma \sigma.$$

Следовательно, $a_{\sigma_0} = a_\sigma$ для всякого σ , сопряженного с σ_0 , а это и означает, что мы можем записать

$$a = \sum_{\gamma} a_\gamma \gamma,$$

где сумма берется по всем классам сопряженных элементов γ .

Замечание. Отметим, что классы сопряженных элементов на самом деле образуют базис центра группового кольца $Z[G]$ над Z и вследствие этого играют универсальную роль в теории представлений.

Отметим также, что классы сопряженных элементов линейно независимы над k и образуют базис для центра алгебры $k[G]$ над k .

Будем отныне предполагать, что k алгебраически замкнуто. Тогда

$$k[G] = \prod_{i=1}^s R_i$$

— прямое произведение простых колец и каждое R_i есть алгебра матриц над k . Центром прямого произведения, очевидно, будет произведение центров сомножителей. Обозначим через k_i образ k в R_i , другими словами,

$$k_i = ke_i,$$

где e_i — единичный элемент в R_i . Тогда центр алгебры $k[G]$ равен также пространству

$$\prod_{i=1}^s k_i,$$

которое s -мерно над k .

Пусть L_i — типический простой левый идеал в R_i . Тогда

$$R_i \approx \text{End}_k(L_i).$$

Положим

$$d_i = \dim_k L_i.$$

Тогда

$$\boxed{d_i^2 = \dim_k R_i \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^s d_i^2 = n}.$$

Имеем также разложение R_i как (G, k) -пространства в прямую сумму

$$R_i \approx L_i^{(d_i)}.$$

Введенные выше обозначения будут далее оставаться фиксированными.

Мы можем суммировать некоторые из наших результатов следующим образом.

Предложение 4. Пусть поле k алгебраически замкнуто. Тогда число классов сопряженных элементов группы G равно числу ее простых характеров и оба эти числа равны размерности s центра групповой алгебры $k[G]$. Классы сопряженных элементов $\gamma_1, \dots, \gamma_s$ и идемпотентные элементы e_1, \dots, e_s образуют базисы центра $k[G]$.

Число элементов в γ_i будет обозначаться через h_i , а в любом классе сопряженных элементов γ — через h_γ . Мы называем это число *порядком класса*. Центр групповой алгебры будет обозначаться через $Z_k(G)$.

Мы можем рассматривать $k[G]$ как G -модуль. Его характер будет называться *регулярным характером*; мы будем обозначать его через χ_{reg} или, если нужно подчеркнуть зависимость от G , через r_G . Представление на $k[G]$ называется *регулярным представлением*. Из нашего разложения $k[G]$ в прямую сумму получаем

$$\boxed{\chi_{\text{reg}} = \sum_{i=1}^s d_i \chi_i}.$$

Вычислим значения регулярного характера.

Предложение 5. Пусть χ_{reg} — регулярный характер. Тогда

$$\chi_{\text{reg}}(\sigma) = 0, \quad \text{если } \sigma \in G, \quad \sigma \neq 1,$$

$$\chi_{\text{reg}}(1) = n.$$

Доказательство. Пусть $1 = \sigma_1, \dots, \sigma_n$ — элементы группы G . Они образуют базис $k[G]$ над k . Матрица элемента 1 есть единичная матрица размера $n \times n$. Отсюда вытекает наше второе утверждение. Если $\sigma \neq 1$, то умножение на σ переставляет $\sigma_1, \dots, \sigma_n$, и непосредственно ясно, что все диагональные элементы в матрице, представляющей σ , равны 0. Это доказывает все, что нам нужно.

Отметим, что мы имеем два естественных базиса для центра $Z_k(G)$ групповой алгебры. Во-первых, классы сопряженных элементов группы G . Во-вторых, элементы e_1, \dots, e_s (т. е. идемпотентные элементы кольца R_i). Мы хотим найти соотношения между ними, т. е., другими словами, хотим найти коэффициенты в выражении e_i через элементы группы. В следующем параграфе значения этих коэффициентов будут интерпретированы как скалярные произведения. Это объяснит их таинственный вид.

Предложение 6. Мы снова предполагаем, что поле k алгебраически замкнуто. Пусть

$$e_i = \sum_{\tau \in G} a_\tau \tau, \quad a_\tau \in k.$$

Тогда

$$a_\tau = \frac{1}{n} \chi_{\text{reg}}(e_i \tau^{-1}) = \frac{d_i}{n} \chi_i(\tau^{-1}).$$

Доказательство. Для всех $\tau \in G$ имеем

$$\chi_{\text{reg}}(e_i \tau^{-1}) = \chi_{\text{reg}}\left(\sum_{\sigma \in G} a_\sigma \sigma \tau^{-1}\right) = \sum_{\sigma \in G} a_\sigma \chi_{\text{reg}}(\sigma \tau^{-1}).$$

В силу предложения 5

$$\chi_{\text{reg}}(e_i \tau^{-1}) = n a_\tau.$$

С другой стороны,

$$\chi_{\text{reg}}(e_i \tau^{-1}) = \sum_{j=1}^s d_j \chi_j(e_i \tau^{-1}) = d_i \chi_i(e_i \tau^{-1}) = d_i \chi_i(\tau^{-1}).$$

Следовательно,

$$d_i \chi_i(\tau^{-1}) = n a_\tau$$

для всех $\tau \in G$. Это доказывает наше предложение.

Следствие 1. Каждый элемент e_i может быть выражен через элементы группы с коэффициентами, которые лежат в поле, порожденном над простым полем корнями t -й степени из единицы, где t — показатель группы G .

Следствие 2. Размерности d_i не делятся на характеристику поля k .

Доказательство. Иначе было бы $e_i = 0$, что невозможно.

Следствие 3. Простые характеристики χ_1, \dots, χ_s линейно независимы над k .

Доказательство. Можно применить доказательство следствия 1 теоремы 3, поскольку мы теперь знаем, что характеристика не делит d_i .

Следствие 4. Предположим дополнительно, что k имеет характеристику 0. Тогда $d_i | n$ для всякого i .

Доказательство. Умножая наше выражение для e_i на n/d_i , а также на e_i , получим

$$\frac{n}{d_i} e_i = \sum_{\sigma \in G} \chi_i(\sigma^{-1}) \sigma e_i.$$

Пусть ζ — примитивный корень m -й степени из единицы и M — модуль над \mathbf{Z} , порожденный конечным числом элементов $\zeta^v \sigma e_i$ ($v = 0, \dots, m-1$ и $\sigma \in G$). Тогда из предыдущего соотношения тотчас видно, что умножение на n/d_i отображает M в себя. В силу определения целых элементов заключаем, что n/d_i — целый элемент над \mathbf{Z} и, следовательно, лежит в \mathbf{Z} , что и требовалось.

Теорема 5. Пусть поле k алгебраически замкнуто. Пусть $Z_k(G)$ — центр алгебры $k[G]$ и $X_k(G)$ — k -пространство функций классов на G . Тогда пространства $Z_k(G)$ и $X_k(G)$ дуальны друг другу относительно спаривания

$$(f, a) \mapsto f(a).$$

Простые характеристы и идемпотентные элементы e_1, \dots, e_s образуют ортогональные друг другу базисы. При этом

$$\chi_i(e_j) = \delta_{ij} d_i.$$

Доказательство. Формула уже была получена в ходе доказательства теоремы 3. Оба пространства, о которых идет речь, имеют размерность s и $d_i \neq 0$. Наше предложение теперь очевидно.

§ 5. Соотношения ортогональности

В этом параграфе мы будем предполагать, что поле k алгебраически замкнуто.

Пусть R — подкольцо в k . Мы обозначаем через $X_R(G)$ R -подмодуль, порожденный над R характеристиками группы G . Это, таким образом, модуль функций, являющихся линейными комбинациями простых характеристик с коэффициентами в R . Если R — простое кольцо (т. е. кольцо целых чисел \mathbf{Z} или кольцо целых чисел mod p , когда k имеет характеристику p), то мы пишем вместо $X_R(G)$ просто $X(G)$.

Определим теперь некоторое билинейное отображение на $X(G) \times X(G)$. Для $f, g \in X(G)$ положим

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{n} \sum_{\sigma \in G} f(\sigma) g(\sigma^{-1}).$$

Теорема 6. Выражение $\langle f, g \rangle$ для $f, g \in X(G)$ принимает значения в простом кольце. Простые характеристы образуют ортонормальный базис для $X(G)$, другими словами,

$$\langle \chi_i, \chi_j \rangle = \delta_{ij}.$$

Для всякого кольца $R \subset k$ это выражение имеет единственное продолжение до R -билинейной формы $X_R(G) \times X_R(G) \rightarrow R$, задаваемой той же самой формулой, что и выше.