Теорема 9. *Пусть k имеет характеристику* 0, *и пусть R — подкольцо в k, содержащее корни m-й степени из единицы и обладающее сопряжением. Тогда спаривание из предложения* 7 *обладает единственным продолжением до эрмитовой формы*

$$Z_R(G) \times Z_R(G) \to R,$$

задаваемой формулами

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \frac{1}{n} \chi_{\text{reg}}(\alpha\bar{\beta}) = \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{s} \chi_\nu(\alpha) \overline{\chi_\nu(\beta)}.$$

Классы сопряженных элементов $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$ образуют ортогональный базис для $Z_R(G)$. Если R содержит $1/n$, то $e_1, \ldots, e_s$ лежат в R и также образуют ортогональный базис для $Z_R(G)$. При этом $\langle e_i, e_i \rangle = d_i^2/n$.

Доказательство. В случае когда α, β лежат в $Z(G)$, формула, приведенная в формулировке теоремы, дает те же самые значения, что и выражение $\langle \alpha, \beta \rangle$ из предложения 7. Таким образом, продолжение существует и, очевидно, единственное. Используя вторую формулу, определяющую скалярное произведение, и вспоминая, что $\chi_\nu(e_i) = 0$ при $\nu \neq i$, мы видим, что $\langle e_i, e_j \rangle = 0$ при $i \neq j$ и

$$\langle e_i, e_i \rangle = \frac{1}{n} \chi_i(e_i) \overline{\chi_i(e_i)},$$

откуда и вытекает наше утверждение.

Отметим, что коэффициенты Фурье для e_i относительно базиса $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$ одни и те же как по отношению к билинейной форме из теоремы 8, так и по отношению к эрмитовой форме из теоремы 9. Это следует из того факта, что $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$ лежат в $Z(G)$ и образуют базис для $Z(G)$ над простым кольцом.

§ 6. *Индуцированные характеры*

Сохраняются обозначения предыдущего параграфа. Однако нам не потребуются все доказанные там результаты: все что нам нужно, — это билинейное спаривание на $X(G)$ и его продолжение до

$$X_R(G) \times X_R(G) \to R.$$

Символ $\langle\ ,\ \rangle$ может интерпретироваться и как билинейное продолжение, и как эрмитово продолжение, согласно теореме 7.

Пусть S — подгруппа в G. Имеется R-линейное отображение, называемое *отображением ограничения*

$$\operatorname{Res}_S^G\colon X_R(G) \to X_R(S),$$

которое каждой функции классов на G сопоставляет ее ограничение на S. Это гомоморфизм колец. Ограничение f на S мы иногда будем обозначать через f_S.

Определим отображение в обратную сторону

$$\mathrm{Tr}_G^S\colon\ X_R(S) \to X_R(G),$$

которое мы будем называть *отображением индуцирования*. Именно, если $g \in X_R(S)$, то продолжаем g до g_0 на G, считая $g_0(\sigma) = 0$ при $\sigma \notin S$ и затем полагая

$$\mathrm{Tr}_G^S(g)(\sigma) = \frac{1}{(S:1)} \sum_{\tau \in G} g_0(\tau\sigma\tau^{-1}).$$

Очевидно, $\mathrm{Tr}_G^S(g)$ есть функция классов на G. Если нет необходимости указывать в обозначении S или G, то мы часто будем писать g^* вместо $\mathrm{Tr}_G^S(g)$ и называть g^* *индуцированной функцией*. Ясно, что отображение Tr_G^S R-линейно.

Так как сейчас мы имеем дело с двумя группами S и G, то мы будем обозначать скалярное произведение через $\langle\ ,\ \rangle_S$ и $\langle\ ,\ \rangle_G$, когда оно берется относительно той или другой из этих групп. Следующая теорема среди прочего показывает, что отображения ограничения и индуцирования сопряжены друг с другом относительно нашей формы.

Теорема 10. *Пусть S — подгруппа в G. Тогда справедливы следующие правила:*

(i) (*Закон взаимности Фробениуса*). *Для $f \in X_R(G)$ и $g \in X_R(S)$ имеем*

$$\langle \mathrm{Tr}_G^S(g),\ f\rangle_G = \langle g,\ \mathrm{Res}_S^G(f)\rangle_S.$$

(ii) $\mathrm{Tr}_G^S(g)\,f = \mathrm{Tr}_G^S(g f_S)$.

(iii) *Если $T \subset S \subset G$ — подгруппы в G, то*

$$\mathrm{Tr}_G^S \circ \mathrm{Tr}_S^T = \mathrm{Tr}_G^T.$$

(iv) *Если $\sigma \in G$ и g^σ определено формулой $g^\sigma(\tau^\sigma) = g(\tau)$, где $\tau^\sigma = \sigma^{-1}\tau\sigma$, то*

$$\mathrm{Tr}_G^S(g) = \mathrm{Tr}_G^{S^\sigma}(g^\sigma).$$

(v) *Если ψ — собственный характер подгруппы S, то $\mathrm{Tr}_G^S(\psi)$ — собственный характер группы G.*

Доказательство. Докажем сначала (ii). Используем обозначение со звездочкой. Мы должны показать, что $g^*f = (gf_S)^*$. Имеем

$$(g^*f)(\tau) = \frac{1}{(S:1)} \sum_{\sigma \in G} g_0(\sigma\tau\sigma^{-1})\,f(\tau) = \frac{1}{(S:1)} \sum_{\sigma \in G} g_0(\sigma\tau\sigma^{-1})\,f(\sigma\tau\sigma^{-1}).$$

Последнее из полученных выражений равно $(gf_S)^*(\tau)$, что и доказывает (ii). Теперь просуммируем по всем τ из G выражения

$$g^*(\tau)f(\tau^{-1}) = \frac{1}{(S:1)} \sum_{\sigma \in G} g_0(\sigma\tau\sigma^{-1}) f(\tau^{-1}) = \\ = \frac{1}{(S:1)} \sum_{\sigma \in G} g_0(\sigma\tau\sigma^{-1}) f(\sigma\tau^{-1}\sigma^{-1}).$$

Ненулевой вклад в нашу двойную сумму внесут только те пары σ, τ, для которых произведения вида $\sigma\tau\sigma^{-1}$ будут элементами из S. Число пар (σ, τ), таких, что $\sigma\tau\sigma^{-1}$ есть некоторый фиксированный элемент из G, равно n (поскольку для всякого $\lambda \in G$ пара $(\sigma\lambda, \lambda^{-1}\tau\lambda)$ есть другая такая пара, а общее число пар равно n^2). Следовательно, наше просуммированное выражение справа равно

$$(G:1)\frac{1}{(S:1)} \sum_{\lambda \in S} g(\lambda) f(\lambda^{-1}).$$

Первое правило вытекает теперь из определений скалярного произведения в G и S соответственно.

Пусть теперь $g = \psi$ — собственный характер подгруппы S и $f = \chi$ — простой характер группы G. Из (i) находим, что коэффициенты Фурье для g^* являются целыми числами $\geqslant 0$. Действительно, $\mathrm{Res}_S^G(\chi)$ — собственный характер S. Поэтому скалярное произведение

$$\langle \psi, \mathrm{Res}_S^G(\chi) \rangle_S$$

есть целое число $\geqslant 0$. Следовательно, ψ^* — собственный характер G, что доказывает (v).

Для доказательства свойства транзитивности удобно ввести следующие обозначения.

Пусть $\{c\}$ — множество правых смежных классов G по подгруппе S. Для каждого смежного класса c выберем фиксированного представителя, обозначаемого через $\bar{c}$. Таким образом, если $\bar{c}_1, \ldots, \bar{c}_r$ — эти представители, то

$$G = \bigcup_c c = \bigcup_c S\bar{c} = \bigcup_{i=1}^{r} S\bar{c}_i.$$

Лемма. *Пусть g — некоторая функция классов на S. Тогда*

$$\mathrm{Tr}_G^S(g)(\xi) = \sum_{i=1}^{r} g_0(\bar{c}_i \xi \bar{c}_i^{-1}).$$

Доказательство. Мы можем сумму по всем $\sigma \in G$ в определении индуцированной функции разложить в двойную сумму

$$\sum_{\sigma \in G} = \sum_{\sigma \in S} \sum_{i=1}^{r};$$

заметим при этом, что всякий член $g_0(\sigma\bar{c}\xi\bar{c}^{-1}\sigma^{-1})$ равен $g_0(\bar{c}\xi\bar{c}^{-1})$ при $\sigma \in S$, поскольку g — функция классов. Следовательно, достаточно в сумме по всем $\sigma \in S$ сократить множитель $1/(S:1)$, чтобы получить выражение, указанное в лемме.

Если $T \subset S \subset G$ — подгруппы в G и

$$G = \bigcup S\bar{c}_i, \quad S = \bigcup T\bar{d}_j$$

— разложения на правые смежные классы, то $\{\bar{d}_j\bar{c}_i\}$ будет системой представителей для правых смежных классов G по T. Ввиду этого свойство транзистивности (iii) очевидно.

Мы предоставим (iv) читателю в качестве упражнения (которое, если принять во внимание лемму, тривиально).

§ 7. *Индуцированные представления*

Пусть G — конечная группа, S — ее подгруппа и F — некоторый S-модуль. Рассмотрим категорию $\mathscr{C}$, объектами которой являются S-гомоморфизмы $\varphi: F \to E$ модуля F в G-модули E. (Отметим, что всякий G-модуль можно рассматривать как S-модуль.) Если φ': $F \to E'$ — другой объект в $\mathscr{C}$, то определяем морфизм $\varphi' \to \varphi$ в $\mathscr{C}$ как G-гомоморфизм $\eta: E' \to E$, для которого коммутативна следующая диаграмма:

$$\begin{tikzcd} & E' \arrow[d, "\eta"] \\ F \arrow[ur, "\varphi'"] \arrow[dr, "\varphi"'] & \\ & E \end{tikzcd}$$

Универсальный объект в $\mathscr{C}$ задается с точностью до однозначно определенного G-изоморфизма. Его обозначением будет

$$\varphi_G^S: F \to \operatorname{Tr}_G^S(F).$$

Символ Tr призван напоминать о следе. Позже мы увидим оправдание для такого обозначения.

Ниже мы докажем, что универсальный объект всегда существует. Если $\varphi: F \to E$ — универсальный объект, то мы будем называть E *индуцированным модулем*. Этот модуль однозначно определен с точностью до единственного G-изоморфизма, для которого коммутативна соответствующая диаграмма. Для удобства мы выберем один индуцированный модуль, такой, что φ — включение. Мы закрепим тогда за этим специальным модулем $\operatorname{Tr}_G^S(F)$ название G-модуля, *индуцированного* S-модулем F.

Пусть $f: F' \to F$ — S-гомоморфизм. Если

$$\varphi_G^S: F' \to \operatorname{Tr}_G^S(F')$$