заметим при этом, что всякий член $g_0(\sigma\bar{c}\xi\bar{c}^{-1}\sigma^{-1})$ равен $g_0(\bar{c}\xi\bar{c}^{-1})$ при $\sigma\in S$, поскольку g — функция классов. Следовательно, достаточно в сумме по всем $\sigma\in S$ сократить множитель $1/(S:1)$, чтобы получить выражение, указанное в лемме.

Если $T\subset S\subset G$ — подгруппы в G и

$$G=\bigcup\bar{S}c_i,\quad S=\bigcup T\bar{d}_j$$

— разложения на правые смежные классы, то $\{\bar{d}_j\bar{c}_i\}$ будет системой представителей для правых смежных классов G по T. Ввиду этого свойство транзитивности (iii) очевидно.

Мы предоставим (iv) читателю в качестве упражнения (которое, если принять во внимание лемму, тривиально).

§ 7. *Индуцированные представления*

Пусть G — конечная группа, S — ее подгруппа и F — некоторый S-модуль. Рассмотрим категорию $\mathscr{C}$, объектами которой являются S-гомоморфизмы $\varphi: F\to E$ модуля F в G-модули E. (Отметим, что всякий G-модуль можно рассматривать как S-модуль.) Если φ': $F\to E'$ — другой объект в $\mathscr{C}$, то определяем морфизм $\varphi'\to\varphi$ в $\mathscr{C}$ как G-гомоморфизм $\eta: E'\to E$, для которого коммутативна следующая диаграмма:

$$\begin{tikzcd} & E' \arrow[d, "\eta"] \\ F \arrow[ur, "\varphi'"] \arrow[r, "\varphi"'] & E \end{tikzcd}$$

Универсальный объект в $\mathscr{C}$ задается с точностью до однозначно определенного G-изоморфизма. Его обозначением будет

$$\varphi_G^S: F\to \mathrm{Tr}_G^S(F).$$

Символ Tr призван напоминать о следе. Позже мы увидим оправдание для такого обозначения.

Ниже мы докажем, что универсальный объект всегда существует. Если $\varphi: F\to E$ — универсальный объект, то мы будем называть E *индуцированным модулем*. Этот модуль однозначно определен с точностью до единственного G-изоморфизма, для которого коммутативна соответствующая диаграмма. Для удобства мы выберем один индуцированный модуль, такой, что φ — включение. Мы закрепим тогда за этим специальным модулем $\mathrm{Tr}_G^S(F)$ название G-модуля, *индуцированного* S-модулем F.

Пусть $f: F'\to F$ — S-гомоморфизм. Если

$$\varphi_G^S: F'\to \mathrm{Tr}_G^S(F')$$

— G-модуль, индуцированный F', то существует однозначно определенный G-гомоморфизм $\mathrm{Tr}_G^S(F') \to \mathrm{Tr}_G^S(F)$, для которого коммутативна следующая диаграмма:

$$\begin{tikzcd} F' \arrow[r, "\varphi_G^S"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, dashed] & \mathrm{Tr}_G^S(F') \arrow[d, "\mathrm{Tr}_G^S(f)"] \\ F \arrow[r, "\varphi_G^S"'] & \mathrm{Tr}_G^S(F) \end{tikzcd}$$

Это просто G-гомоморфизм, соответствующий универсальному свойству для S-гомоморфизма $\varphi_G^S \circ f$, изображенного в нашей диаграмме пунктирной линией. *Таким образом,* Tr_G^S *есть функтор из категории S-модулей в категорию G-модулей.*

Из универсальности и единственности индуцированного модуля мы получаем некоторые формальные свойства.

Tr_G^S *коммутирует с прямыми суммами: для данной прямой суммы* $S = F \oplus F'$

$$\mathrm{Tr}_G^S(F \oplus F') \approx \mathrm{Tr}_G^S(F) \oplus \mathrm{Tr}_G^S(F'),$$

причем прямая сумма справа — это G-прямая сумма.

Если f, g: $F' \to F$ — S-гомоморфизмы, то

$$\mathrm{Tr}_G^S(f+g) = \mathrm{Tr}_G^S(f) + \mathrm{Tr}_G^S(g).$$

Если $T \subset S \subset G$ — подгруппы в G и F — T-модуль, то

$$\mathrm{Tr}_G^S \circ \mathrm{Tr}_S^T(F) \approx \mathrm{Tr}_G^T(F).$$

Во всех трех случаях равенство между левой и правой частями наших соотношений тотчас следует из единственности универсального объекта. Проверку мы предоставим читателю.

Чтобы доказать существование индуцированного модуля, обозначим через $M_G^S(F)$ аддитивную группу функций $f: G \to F$, удовлетворяющих условию

$$\sigma f(\xi) = f(\sigma\xi)$$

для $\sigma \in S$ и $\xi \in G$. Определим действие G на $M_G^S(F)$, положив

$$(\sigma f)(\xi) = f(\xi\sigma)$$

для σ, $\xi \in G$. Ясно, что $M_G^S(F)$ — G-модуль.

Предложение 8. *Пусть отображение $\varphi: F \to M_G^S(F)$ таково, что для отображения $\varphi(x) = \varphi_x$ будет*

$$\varphi_x(\tau) = \begin{cases} 0 & \text{при } \tau \in S, \\ \tau x & \text{при } \tau \in S. \end{cases}$$

Тогда отображение φ *есть* S*-гомоморфизм, объект* $\varphi: F \to M_G^S(F)$ *универсален и гомоморфизм* φ *инъективен. Образ* φ *состоит из всех таких элементов* $f \in M_G^S(F)$, *что* $f(\tau) = 0$ *при* $\tau \notin S$.

Доказательство. Пусть $\sigma \in S$, $x \in F$ и $\tau \in G$. Тогда

$$(\sigma\varphi_x)(\tau) = \varphi_x(\tau\sigma).$$

Если $\tau \in S$, то последнее выражение равно $\varphi_{\sigma x}(\tau)$. Если $\tau \notin S$, то $\tau\sigma \notin S$ и, следовательно, оба выражения $\varphi_{\sigma x}(\tau)$ и $\varphi_x(\tau\sigma)$ равны 0. Таким образом, φ есть S-гомоморфизм и непосредственно ясно, что он инъективен. Далее, если $f \in M_G^S(F)$ таково, что $f(\tau) = 0$ для $\tau \notin S$, то из определений следует, что $f = \varphi_x$, где $x = f(1)$.

Остается доказать, что φ универсален. Чтобы это сделать, исследуем более детально структуру $M_G^S(F)$.

Предложение 9. *Пусть* $G = \bigcup_{i=1}^{r} S\bar{c}_i$ — *разложение* G *на правые смежные классы,* F_1 — *аддитивная группа функций из* $M_G^S(F)$, *принимающих значение* 0 *на элементах* $\xi \in G$, $\xi \notin S$. *Тогда*

$$M_G^S(F) = \prod_{i=1}^{r} \bar{c}_i^{-1} F_1,$$

где прямая сумма рассматривается как абелева группа.

Доказательство. Для всякого $f \in M_G^S(F)$ пусть f_i — такая функция, что

$$f_i(\xi) = \begin{cases} 0, & \text{если } \xi \notin S\bar{c}_i, \\ f(\xi), & \text{если } \xi \in S\bar{c}_i. \end{cases}$$

Очевидно, $f_i(\sigma\bar{c}_i) = (\bar{c}_i f_i)(\sigma)$ для всех $\sigma \in S$. Непосредственно видно, что $\bar{c}_i f_i$ лежит в F_1 и что

$$f = \sum_{i=1}^{r} \bar{c}_i^{-1}(\bar{c}_i f_i).$$

Таким образом, $M_G^S(f)$ есть сумма подгрупп $\bar{c}_i^{-1} F_1$. Ясно, что эта сумма прямая, что и требовалось.

Отметим, что $\{\bar{c}_1^{-1}, \ldots, \bar{c}_r^{-1}\}$ образуют систему представителей для левых смежных классов G по S. Действие G на $M_G^S(F)$ определяется предыдущим разложением в прямую сумму. Мы видим, что G переставляет слагаемые транзитивно. Слагаемое F_1 S-изоморфно исходному модулю F, как установлено в предложении 8.

Теорема 11. *Пусть* $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_r\}$ — *некоторая система представителей левых смежных классов* G *по* S. *Тогда существует* G-*модуль* E, *содержащий* F *в качестве* S-*подмодуля и такой, что*

$$E = \coprod_{i=1}^{r} \lambda_i F$$

есть прямая сумма (как абелева группа). Пусть $\varphi: F \to E$ — *отображение включения. Тогда* φ *универсально в нашей категории* $\mathscr{C}$, *т. е.* E — *индуцированный модуль.*

Доказательство. Обычной теоретико-множественной процедурой замены F_1 на F в $M_G^S(F)$ получаем G-модуль E, содержащий F в качестве S-подмодуля и обладающий нужным нам разложением в прямую сумму. Пусть φ': $F \to E'$ — S-гомоморфизм в G-модуль E'. Определим отображение h: $E \to E'$ правилом

$$h(\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_r x_r) = \lambda_1 \varphi'(x_1) + \ldots + \lambda_r \varphi'(x_r),$$

где $x_i \in F$. Это отображение правильно определено, так как наша сумма для E — прямая. Мы должны показать, что h — G-гомоморфизм. Пусть $\sigma \in G$. Тогда

$$\sigma\lambda_i = \lambda_{\sigma(i)}\tau_{\sigma, i},$$

где $\sigma(i)$ — некоторый индекс, зависящий от σ, i, а $\tau_{\sigma, i}$ — элемент из S, также зависящий от σ, i. Имеем

$$h(\sigma\lambda_i x_i) = h(\lambda_{\sigma(i)}\tau_{\sigma, i} x_i) = \lambda_{\sigma(i)}\varphi'(\tau_{\sigma, i} x_i).$$

Так как φ' — S-гомоморфизм, то это выражение равно

$$\lambda_{\sigma(i)}\tau_{\sigma, i}\varphi'(x_i) = \sigma h(\lambda_i x_i).$$

В силу линейности заключаем, что h — G-гомоморфизм, что и требовалось.

Предположим, что мы фиксировали основное поле k и рассматривали не произвольные модули, а только k-пространства, на которых имеется представление G. Ясно, что все наши конструкции и определения применимы и в этом контексте. Поэтому, имея представление подгруппы S на k-пространстве F, мы получаем индуцированное представление группы G на $\mathrm{Tr}_G^S(F)$.

Предложение 10. *Пусть* ψ — *характер представления подгруппы* S *на* k-*пространстве* F, E — *пространство индуцированного представления. Тогда характер* χ *представления на* E *равен индуцированному характеру* ψ^*, *т. е. задается формулой*

$$\chi(\xi) = \sum_c \psi_0(\bar{c}\bar{\xi}\bar{c}^{-1}),$$

где сумма берется по всем правым смежным классам с группы G по S, $\bar{c}$ — фиксированный представитель для c и ψ_0 — продолжение ψ на G, которое получается, если положить $\psi_0(\sigma)=0$ для $\sigma \notin S$.

Доказательство. Пусть $\{w_1, \ldots, w_m\}$ — базис для F над k. Мы знаем, что

$$E = \coprod \bar{c}^{-1}F.$$

Пусть σ — элемент из G. Элементы $\{\overline{c\sigma}^{-1}w_j\}_{c,\,j}$ образуют базис для E над k.

Заметим, что $\bar{c}\sigma\overline{c\sigma}^{-1}$ есть элемент из S, так как

$$S\bar{c}\sigma = Sc\sigma = S\overline{c\sigma}.$$

Имеем

$$\sigma(\overline{c\sigma}^{-1}w_j) = \bar{c}^{-1}(\bar{c}\sigma\overline{c\sigma}^{-1})\,w_j.$$

Пусть

$$(\bar{c}\sigma\overline{c\sigma}^{-1})_{\mu j}$$

— компоненты матрицы, представляющей действие $\bar{c}\sigma\overline{c\sigma}^{-1}$ на F относительно базиса $\{w_1, \ldots, w_m\}$. Тогда действие σ на E задается соотношениями

$$\sigma(\overline{c\sigma}^{-1}w_j) = \bar{c}^{-1}\sum_{\mu}(\bar{c}\sigma\overline{c\sigma}^{-1})_{\mu j}w_\mu = \\ = \sum_{\mu}(\bar{c}\sigma\overline{c\sigma}^{-1})_{\mu j}(\bar{c}^{-1}w_\mu).$$

По определению

$$\chi(\sigma) = \sum_{c\sigma=c}\sum_{j}(\bar{c}\sigma\overline{c\sigma}^{-1})_{jj}.$$

Но $c\sigma = c$ в том и только в том случае, если $\bar{c}\sigma\bar{c}^{-1} \in S$. Кроме того,

$$\psi(\bar{c}\sigma\bar{c}^{-1}) = \sum_{j}(\bar{c}\sigma\bar{c}^{-1})_{jj}.$$

Следовательно,

$$\chi(\sigma) = \sum_{c}\psi_0(\bar{c}\sigma\bar{c}^{-1}),$$

что и требовалось показать.

Следующие три параграфа, которые по существу независимы друг от друга, дают примеры индуцированных представлений. В каждом случае мы показываем, что какие-то представления либо индуцированы представлениями некоторых хорошо известных типов, либо являются линейными комбинациями с целочисленными коэффициентами таких представлений. Самое замечательное во всех этих результатах то, что все характеры

могут быть представлены как линейные комбинации индуцированных характеров, возникающих из одномерных характеров. Таким образом, теория характеров сводится к изучению одномерных, или абелевых характеров.

§ 8. Положительное разложение регулярного характера

Пусть G — конечная группа и $k = \mathbf{C}$ — поле комплексных чисел. Пусть, далее, 1_G — тривиальный характер, а r_G — регулярный характер.

Предложение 11. *Пусть H — подгруппа в G, ψ — характер H, ψ^* — индуцированный характер. Тогда кратность характера 1_H в ψ та же самая, что и кратность 1_G в ψ^*.*

Доказательство. В силу теоремы 10 (i) имеем

$$\langle \psi, 1_H \rangle_H = \langle \psi^*, 1_G \rangle_G.$$

Эти скалярные произведения как раз и являются интересующими нас кратностями.

Предложение 12. *Регулярное представление есть представление, индуцированное тривиальным характером на тривиальной подгруппе группы G.*

Доказательство. Это тотчас следует из определения индуцированного характера

$$\psi^*(\tau) = \sum_{\sigma \in G} \psi_0(\sigma\tau\sigma^{-1}),$$

если взять $\psi = 1$ на тривиальной подгруппе.

Следствие. *Кратность 1_G в регулярном характере r_G равна* 1.

Мы исследуем теперь характер

$$u_G = r_G - 1_G.$$

Теорема 12 (Брауэр). *Характер πu_G является линейной комбинацией с целыми положительными коэффициентами характеров, индуцированных одномерными характерами циклических подгрупп группы G.*

Доказательство состоит из двух предложений, дающих явное описание индуцированных характеров. Я обязан Серру приведенным далее изложением работы Брауэра.