могут быть представлены как линейные комбинации индуцированных характеров, возникающих из одномерных характеров. Таким образом, теория характеров сводится к изучению одномерных, или абелевых характеров.

§ 8. Положительное разложение регулярного характера

Пусть G — конечная группа и $k = \mathbf{C}$ — поле комплексных чисел. Пусть, далее, 1_G — тривиальный характер, а r_G — регулярный характер.

Предложение 11. *Пусть H — подгруппа в G, ψ — характер H, ψ^* — индуцированный характер. Тогда кратность характера 1_H в ψ та же самая, что и кратность 1_G в ψ^*.*

Доказательство. В силу теоремы 10 (i) имеем

$$\langle \psi, 1_H \rangle_H = \langle \psi^*, 1_G \rangle_G.$$

Эти скалярные произведения как раз и являются интересующими нас кратностями.

Предложение 12. *Регулярное представление есть представление, индуцированное тривиальным характером на тривиальной подгруппе группы G.*

Доказательство. Это тотчас следует из определения индуцированного характера

$$\psi^*(\tau) = \sum_{\sigma \in G} \psi_0(\sigma\tau\sigma^{-1}),$$

если взять $\psi = 1$ на тривиальной подгруппе.

Следствие. *Кратность 1_G в регулярном характере r_G равна* 1.

Мы исследуем теперь характер

$$u_G = r_G - 1_G.$$

Теорема 12 (Брауэр). *Характер πu_G является линейной комбинацией с целыми положительными коэффициентами характеров, индуцированных одномерными характерами циклических подгрупп группы G.*

Доказательство состоит из двух предложений, дающих явное описание индуцированных характеров. Я обязан Серру приведенным далее изложением работы Брауэра.

Пусть A — циклическая группа порядка a. Определим на A функцию θ_A следующими условиями:

$$\theta_A(\sigma) = \begin{cases} a, & \text{если } \sigma \text{ — образующая группы } A, \\ 0 & \text{— в противном случае.} \end{cases}$$

Положим $\lambda_A = \varphi(a) r_A - \theta_A$ (где φ — функция Эйлера) и $\lambda_A = 0$, если $a = 1$.

Искомый результат содержится в следующих двух предложениях.

Предложение 13. *Пусть G — конечная группа порядка n. Тогда*

$$nu_G = \sum \lambda_A^*,$$

где сумма берется по всем циклическим подгруппам группы G.

Доказательство. Для данных функций классов χ, ψ на G имеем обычное скалярное произведение

$$\langle \psi, \chi \rangle_G = \frac{1}{n} \sum_{\sigma \in G} \psi(\sigma) \overline{\chi(\sigma)}.$$

Пусть ψ — любая функция классов на G. Тогда

$$\langle \psi, nu_G \rangle = \langle \psi, nr_G \rangle - \langle \psi, n1_G \rangle = \\ = n\psi(1) - \sum_{\sigma \in G} \psi(\sigma).$$

С другой стороны, используя тот факт, что индуцированный характер сопряжен с ограничением, получаем

$$\sum_A \langle \psi, \lambda_A^* \rangle = \sum_A \langle \psi \mid A, \lambda_A \rangle = \\ = \sum_A \langle \psi \mid A, \varphi(a) r_A - \theta_A \rangle = \\ = \sum_A \varphi(a) \psi(1) - \sum_A \frac{1}{a} \sum_{\sigma \text{ порождает } A} a\psi(\sigma) = \\ = n\psi(1) - \sum_{\sigma \in G} \psi(\sigma).$$

Так как функции в левой и правой частях утверждаемого равенства имеют одно и то же скалярное произведение с произвольной функцией классов, то они равны. Это доказывает наше предложение.

Предложение 14. *Если $A \neq \{1\}$, то λ_A есть линейная комбинация неприводимых нетривиальных характеров A с целыми положительными коэффициентами.*

Доказательство. Если A — циклическая группа простого порядка, то в силу предложения 13 $\lambda_A = n u_A$, и наше утверждение вытекает из стандартной структуры регулярного представления.

Чтобы доказать утверждение в общем случае, достаточно установить, что коэффициенты Фурье функции λ_A относительно характеров степени 1 являются целыми числами $\geqslant 0$. Пусть ψ — характер степени 1. Взяв скалярное произведение относительно A, получим

$$\langle \psi, \lambda_A \rangle = \varphi(a)\psi(1) - \sum_{\sigma\text{-образующая}} \psi(\sigma) =$$
$$= \varphi(a) - \sum_{\sigma\text{-образующая}} \psi(\sigma) =$$
$$= \sum_{\sigma\text{-образующая}} (1 - \psi(\sigma)).$$

Сумма $\sum \psi(\sigma)$, взятая по образующим A, является, с одной стороны, целым алгебраическим числом, а с другой стороны, рациональным числом (в силу любого из многочисленных элементарных соображений) и, следовательно, является целым рациональным числом. Далее, если характер ψ нетривиален, то вещественные части всех чисел

$$1 - \psi(\sigma)$$

будут > 0 для $\sigma \neq \mathrm{id}$ и 0 для $\sigma = \mathrm{id}$. Отсюда заключаем, что сумма должна быть равна целому положительному числу. Если ψ — тривиальный характер, то сумма, очевидно, равна 0. Наше предложение доказано.

§ 9. Сверхразрешимые группы

Пусть G — конечная группа. Мы будем говорить, что G *сверхразрешима*, если существует такая последовательность подгрупп

$$\{1\} \subset G_1 \subset G_2 \subset \ldots \subset G_m = G,$$

что каждая подгруппа G_i нормальна в G, и G_{i+1}/G_i — циклическая группа простого порядка.

Мы знаем из теории p-групп, что всякая p-группа сверхразрешима и что этим свойством обладает также прямое произведение p-группы с абелевой группой.

Предложение 15. *Всякая подгруппа и всякая фактор-группа сверхразрешимой группы сверхразрешимы.*

Доказательство. Очевидно (использовать стандартные теоремы о гомоморфизмах).

Предложение 16. *Пусть G — неабелева сверхразрешимая группа. Тогда существует нормальная абелева подгруппа, которая собственным образом содержит центр.*