

Доказательство. Если A — циклическая группа простого порядка, то в силу предложения 13 $\lambda_A = n\iota_A$, и наше утверждение вытекает из стандартной структуры регулярного представления.

Чтобы доказать утверждение в общем случае, достаточно установить, что коэффициенты Фурье функции λ_A относительно характеров степени 1 являются целыми числами ≥ 0 . Пусть ψ — характер степени 1. Взяв скалярное произведение относительно A , получим

$$\begin{aligned} \langle \psi, \lambda_A \rangle &= \varphi(a) \psi(1) - \sum_{\sigma\text{-образующая}} \psi(\sigma) = \\ &= \varphi(a) - \sum_{\sigma\text{-образующая}} \psi(\sigma) = \\ &= \sum_{\sigma\text{-образующая}} (1 - \psi(\sigma)). \end{aligned}$$

Сумма $\sum \psi(\sigma)$, взятая по образующим A , является, с одной стороны, целым алгебраическим числом, а с другой стороны, рациональным числом (в силу любого из многочисленных элементарных соображений) и, следовательно, является целым рациональным числом. Далее, если характер ψ нетривиален, то вещественные части всех чисел

$$1 - \psi(\sigma)$$

будут > 0 для $\sigma \neq \text{id}$ и 0 для $\sigma = \text{id}$. Отсюда заключаем, что сумма должна быть равна целому положительному числу. Если ψ — тривиальный характер, то сумма, очевидно, равна 0 . Наше предложение доказано.

§ 9. Сверхразрешимые группы

Пусть G — конечная группа. Мы будем говорить, что G *сверхразрешима*, если существует такая последовательность подгрупп

$$\{1\} \subset G_1 \subset G_2 \subset \dots \subset G_m = G,$$

что каждая подгруппа G_i нормальна в G , и G_{i+1}/G_i — циклическая группа простого порядка.

Мы знаем из теории p -групп, что всякая p -группа сверхразрешима и что этим свойством обладает также прямое произведение p -группы с абелевой группой.

Предложение 15. *Всякая подгруппа и всякая факторгруппа сверхразрешимой группы сверхразрешимы.*

Доказательство. Очевидно (использовать стандартные теоремы о гомоморфизмах).

Предложение 16. *Пусть G — неабелева сверхразрешимая группа. Тогда существует нормальная абелева подгруппа, которая собственным образом содержит центр.*

Доказательство. Пусть C — центр группы G , $\bar{G} = G/C$, \bar{H} — нормальная подгруппа простого порядка в \bar{G} и H — ее полный прообраз в G при каноническом отображении $G \rightarrow G/C$. Если $\bar{\sigma}$ — образующая \bar{H} , то прообраз σ элемента $\bar{\sigma}$ вместе с C порождает H . Следовательно, H абелева, нормальна и собственным образом содержит центр.

Теорема 13 (Бликфельд). Пусть G — сверхразрешимая группа, k — алгебраически замкнутое поле, $\text{char } k \nmid (G : 1)$, и пусть E — простое (G, k) -пространство. Если $\dim_k E > 1$, то существуют собственная подгруппа H в G и простое (H, k) -подпространство F в E , такие, что модуль E индуцирован подмодулем F .

Доказательство. Так как простое представление над абелевой группой одномерно, то из наших условий вытекает, что G неабелева.

Мы дадим сначала доказательство нашей теоремы при дополнительном предположении, что модуль E — точный. (Это означает, что из условия $\sigma x = x$ для всех $x \in E$ следует, что $\sigma = 1$.) В конце мы легко избавимся от этого ограничения.

Лемма. Пусть G — конечная группа и k — алгебраически замкнутое поле, $\text{char } k \nmid (G : 1)$. Пусть E — простое точное G -пространство над k . Предположим, что в G имеется нормальная абелева подгруппа H , собственным образом содержащая центр G . Тогда существуют собственная подгруппа H_1 в G , содержащая H и простое H_1 -пространство F , такие, что E есть индуцированный модуль модуля F с H_1 на G .

Доказательство. Рассмотрим E как H -пространство. Оно является прямой суммой простых H -пространств, и так как H абелева, каждое такое простое H -пространство одномерно.

Пусть $v \in E$ порождает одномерное H -пространство и ψ — его характер. Если $w \in E$ также порождает одномерное H -пространство с тем же самым характером ψ , то для всех $a, b \in k$ и $\tau \in H$ имеем

$$\tau(av + bw) = \psi(\tau)(av + bw).$$

Обозначив через F_ψ подпространство в E , порожденное всеми одномерными H -подпространствами, имеющими характер ψ , получаем разложение в H -прямую сумму

$$E = \coprod_{\psi} F_{\psi}.$$

Мы утверждаем, что $E \neq F_{\psi}$. В противном случае пусть $v \in E$, $v \neq 0$ и $\sigma \in G$. Тогда по предположению $\sigma^{-1}v$ порождает одномерное

H -пространство, имеющее характер ψ . Следовательно, для $\tau \in H$ имеем

$$\begin{aligned}\tau(\sigma^{-1}v) &= \psi(\tau)\sigma^{-1}v, \\ (\sigma\tau\sigma^{-1})v &= \sigma\psi(\tau)\sigma^{-1}v = \psi(\tau)v.\end{aligned}$$

Это показывает, что $\sigma\tau\sigma^{-1}$ и τ одинаково действуют на элемент v из E . Так как H не содержится в центре G , то существуют $\tau \in H$ и $\sigma \in G$, такие, что $\sigma\tau\sigma^{-1} \neq \tau$, и мы получили противоречие с предположением, что представление E — точное.

Докажем, что G транзитивным образом переставляет пространства F_ψ .

Пусть $v \in F_\psi$. Для любых $\tau \in H$ и $\sigma \in G$ имеем

$$\tau(\sigma v) = \sigma(\sigma^{-1}\tau\sigma)v = \sigma\psi(\sigma^{-1}\tau\sigma)v = \psi_\sigma(\tau)\sigma v,$$

где ψ_σ — функция на H , задаваемая правилом $\psi_\sigma(\tau) = \psi(\sigma^{-1}\tau\sigma)$. Это показывает, что σ отображает F_ψ в F_{ψ_σ} . Однако в силу симметрии σ^{-1} отображает F_{ψ_σ} в F_ψ , и эти два отображения σ, σ^{-1} дают взаимно однозначное соответствие между F_{ψ_σ} и F_ψ . Таким образом, G переставляет пространства $\{F_\psi\}$.

Пусть $E' = GF_{\psi_0} = \sum \sigma F_{\psi_0}$ для некоторого фиксированного ψ_0 . Тогда E' есть G -подпространство в E , и так как E предполагается простым, то $E' = E$. Это доказывает, что пространства $\{F_\psi\}$ переставляются транзитивно.

Пусть $F = F_{\psi_1}$ для некоторого фиксированного ψ_1 . F есть H -подпространство в E . Пусть H_1 — подгруппа, состоящая из всех таких элементов $\tau \in G$, что $\tau F = F$. Тогда $H_1 \neq G$, так как $E \neq F_\psi$. Мы утверждаем, что F — простое H_1 -пространство и что E' есть индуцированное подпространство пространства F с H_1 на G .

Чтобы это увидеть, возьмем разложение $G = \cup H_1\bar{c}$ группы G на правые смежные классы относительно подгруппы H_1 . Элементы $\{\bar{c}^{-1}\}$ образуют систему представителей левых смежных классов относительно подгруппы H_1 . Так как

$$E = \sum_{\sigma \in G} \sigma F,$$

то

$$E = \sum_c \bar{c}^{-1} F$$

Мы утверждаем, что эта последняя сумма прямая и что F — простое H_1 -пространство.

Так как G переставляет пространства $\{F_\psi\}$, то по определению H_1 есть группа изотропии элемента F при действии G на этом множестве пространств, и что, следовательно, элементы орбиты — это в точности $\{\bar{c}^{-1}F\}$, где c пробегает все смежные классы. Таким

образом, пространства $\{\bar{c}^{-1}F\}$ различны, и мы имеем разложение в прямую сумму

$$E = \coprod_c \bar{c}^{-1}F.$$

Если W — собственное H_1 -подпространство в F , то $\coprod \bar{c}^{-1}W$ — собственное G -подпространство в E , вопреки предположению, что E простое. Это доказывает наше утверждение.

Применяя теперь теорему 11, заключаем, что E — модуль, индуцированный F , что и доказывает теорему 13 в том случае, когда E — точный модуль.

Предположим теперь, что E неточный. Пусть G_0 — нормальная подгруппа в G , служащая ядром представления $G \rightarrow \text{Aut}_k(E)$. Положим $\bar{G} = G/G_0$. Тогда E дает точное представление для \bar{G} . Поскольку \bar{E} неодномерно, \bar{G} неабелева и существуют собственная подгруппа \bar{H} в \bar{G} и простое \bar{H} -пространство F , такие, что

$$E = \text{Tr}_{\bar{G}}^{\bar{H}}(F).$$

Пусть H — полный прообраз \bar{H} при естественном отображении $G \rightarrow \bar{G}$. Тогда $H \supset G_0$ и F — простое H -пространство. При действии \bar{G} как группы перестановок на множестве k -подпространств $\{\sigma F\}_{\sigma \in \bar{G}}$, как мы знаем, \bar{H} есть подгруппа изотропии одного из элементов. Следовательно, H есть подгруппа изотропии в G при том же самом действии. Снова применяя теорему 11, заключаем, что E индуцировано F , т. е.

$$E = \text{Tr}_G^H(F),$$

и тем самым теорема 13 доказана.

Следствие. Пусть G — произведение p -группы и циклической группы, k — алгебраически замкнутое поле, $\text{char } k \nmid (G : 1)$. Если E — простое (G, k) -пространство и $\dim_k E > 1$, то E индуцируется одномерным представлением некоторой подгруппы.

Доказательство. Применяем теорему шаг за шагом, используя транзитивность индуцированных представлений, пока не получим одномерное представление некоторой подгруппы.

§ 10. Теорема Брауэра

Пусть $k = \mathbb{C}$ — поле комплексных чисел, R — некоторое подкольцо в k . Мы будем иметь дело с кольцом $X_R(G)$, состоящим из всех линейных комбинаций с коэффициентами в R простых характеров G над k . (Это множество является кольцом в силу предложения 2 § 2.)