Доказательство. Если A — циклическая группа простого порядка, то в силу предложения 13 $\lambda_A = nu_A$, и наше утверждение вытекает из стандартной структуры регулярного представления.

Чтобы доказать утверждение в общем случае, достаточно установить, что коэффициенты Фурье функции λ_A относительно характеров степени 1 являются целыми числами $\geqslant 0$. Пусть ψ — характер степени 1. Взяв скалярное произведение относительно A, получим

$$\begin{aligned}\langle \psi, \lambda_A \rangle &= \varphi(a)\psi(1) - \sum_{\sigma\text{-образующая}} \psi(\sigma) = \\ &= \varphi(a) - \sum_{\sigma\text{-образующая}} \psi(\sigma) = \\ &= \sum_{\sigma\text{-образующая}} (1 - \psi(\sigma)).\end{aligned}$$

Сумма $\sum \psi(\sigma)$, взятая по образующим A, является, с одной стороны, целым алгебраическим числом, а с другой стороны, рациональным числом (в силу любого из многочисленных элементарных соображений) и, следовательно, является целым рациональным числом. Далее, если характер ψ нетривиален, то вещественные части всех чисел

$$1 - \psi(\sigma)$$

будут > 0 для $\sigma \neq \mathrm{id}$ и 0 для $\sigma = \mathrm{id}$. Отсюда заключаем, что сумма должна быть равна целому положительному числу. Если ψ — тривиальный характер, то сумма, очевидно, равна 0. Наше предложение доказано.

§ 9. Сверхразрешимые группы

Пусть G — конечная группа. Мы будем говорить, что G *сверхразрешима*, если существует такая последовательность подгрупп

$$\{1\} \subset G_1 \subset G_2 \subset \ldots \subset G_m = G,$$

что каждая подгруппа G_i нормальна в G, и G_{i+1}/G_i — циклическая группа простого порядка.

Мы знаем из теории p-групп, что всякая p-группа сверхразрешима и что этим свойством обладает также прямое произведение p-группы с абелевой группой.

Предложение 15. *Всякая подгруппа и всякая факторгруппа сверхразрешимой группы сверхразрешимы.*

Доказательство. Очевидно (использовать стандартные теоремы о гомоморфизмах).

Предложение 16. *Пусть G — неабелева сверхразрешимая группа. Тогда существует нормальная абелева подгруппа, которая собственным образом содержит центр.*

Доказательство. Пусть C — центр группы G, $\overline{G} = G/C$, $\overline{H}$ — нормальная подгруппа простого порядка в $\overline{G}$ и H — ее полный прообраз в G при каноническом отображении $G \to G/C$. Если $\overline{\sigma}$ — образующая $\overline{H}$, то прообраз σ элемента $\overline{\sigma}$ вместе с C порождает H. Следовательно, H абелева, нормальна и собственным образом содержит центр.

Теорема 13 (Бликфельд). *Пусть G — сверхразрешимая группа, k — алгебраически замкнутое поле,* $\operatorname{char} k \nmid (G:1)$, *и пусть E — простое (G, k)-пространство. Если* $\dim_k E > 1$, *то существуют собственная подгруппа H в G и простое (H, k)-подпространство F в E, такие, что модуль E индуцирован подмодулем F.*

Доказательство. Так как простое представление над абелевой группой одномерно, то из наших условий вытекает, что G неабелева.

Мы дадим сначала доказательство нашей теоремы при дополнительном предположении, что модуль E — точный. (Это означает, что из условия $\sigma x = x$ для всех $x \in E$ следует, что $\sigma = 1$.) В конце мы легко избавимся от этого ограничения.

Лемма. *Пусть G — конечная группа и k — алгебраически замкнутое поле,* $\operatorname{char} k \nmid (G:1)$. *Пусть E — простое точное G-пространство над k. Предположим, что в G имеется нормальная абелева подгруппа H, собственным образом содержащая центр G. Тогда существуют собственная подгруппа H_1 в G, содержащая H и простое H_1-пространство F, такие, что E есть индуцированный модуль модуля F с H_1 на G.*

Доказательство. Рассмотрим E как H-пространство. Оно является прямой суммой простых H-пространств, и так как H абелева, каждое такое простое H-пространство одномерно.

Пусть $v \in E$ порождает одномерное H-пространство и ψ — его характер. Если $w \in E$ также порождает одномерное H-пространство с тем же самым характером ψ, то для всех $a, b \in k$ и $\tau \in H$ имеем

$$\tau(av + bw) = \psi(\tau)(av + bw).$$

Обозначив через F_ψ подпространство в E, порожденное всеми одномерными H-подпространствами, имеющими характер ψ, получаем разложение в H-прямую сумму

$$E = \coprod_{\psi} F_\psi.$$

Мы утверждаем, что $E \neq F_\psi$. В противном случае пусть $v \in E$, $v \neq 0$ и $\sigma \in G$. Тогда по предположению $\sigma^{-1}v$ порождает одномерное

H-пространство, имеющее характер ψ. Следовательно, для $\tau \in H$ имеем

$$\tau(\sigma^{-1}v) = \psi(\tau)\,\sigma^{-1}v,$$
$$(\sigma\tau\sigma^{-1})\,v = \sigma\psi(\tau)\,\sigma^{-1}v = \psi(\tau)\,v.$$

Это показывает, что $\sigma\tau\sigma^{-1}$ и τ одинаково действуют на элемент v из E. Так как H не содержится в центре G, то существуют $\tau \in H$ и $\sigma \in G$, такие, что $\sigma\tau\sigma^{-1} \neq \tau$, и мы получили противоречие с предположением, что представление E — точное.

Докажем, что G транзитивным образом переставляет пространства F_ψ.

Пусть $v \in F_\psi$. Для любых $\tau \in H$ и $\sigma \in G$ имеем

$$\tau(\sigma v) = \sigma(\sigma^{-1}\tau\sigma)\,v = \sigma\psi(\sigma^{-1}\tau\sigma)\,v = \psi_\sigma(\tau)\,\sigma v,$$

где ψ_σ — функция на H, задаваемая правилом $\psi_\sigma(\tau) = \psi(\sigma^{-1}\tau\sigma)$. Это показывает, что σ отображает F_ψ в F_{ψ_σ}. Однако в силу симметрии σ^{-1} отображает F_{ψ_σ} в F_ψ, и эти два отображения σ, σ^{-1} дают взаимно однозначное соответствие между F_{ψ_σ} и F_ψ. Таким образом, G переставляет пространства $\{F_\psi\}$.

Пусть $E' = GF_{\psi_0} = \sum \sigma F_{\psi_0}$ для некоторого фиксированного ψ_0. Тогда E' есть G-подпространство в E, и так как E предполагается простым, то $E' = E$. Это доказывает, что пространства $\{F_\psi\}$ переставляются транзитивно.

Пусть $F = F_{\psi_1}$ для некоторого фиксированного ψ_1. F есть H-подпространство в E. Пусть H_1 — подгруппа, состоящая из всех таких элементов $\tau \in G$, что $\tau F = F$. Тогда $H_1 \neq G$, так как $E \neq F_\psi$. *Мы утверждаем, что F — простое H_1-пространство и что E есть индуцированное пространство пространства F с H_1 на G.*

Чтобы это увидеть, возьмем разложение $G = \bigcup H_1\bar{c}$ группы G на правые смежные классы относительно подгруппы H_1. Элементы $\{\bar{c}^{-1}\}$ образуют систему представителей левых смежных классов относительно подгруппы H_1. Так как

$$E = \sum_{\sigma \in G} \sigma F,$$

то

$$E = \sum_c \bar{c}^{-1} F$$

Мы утверждаем, что эта последняя сумма прямая и что F — простое H_1-пространство.

Так как G переставляет пространства $\{F_\psi\}$, то по определению H_1 есть группа изотропии элемента F при действии G на этом множестве пространств, и что, следовательно, элементы орбиты — это в точности $\{\bar{c}^{-1}F\}$, где c пробегает все смежные классы. Таким образом, пространства $\{\bar{c}^{-1}F\}$ различны, и мы имеем разложение в прямую сумму

$$E = \coprod_{c} \bar{c}^{-1}F.$$

Если W — собственное H_1-подпространство в F, то $\coprod \bar{c}^{-1}W$ — собственное G-подпространство в E, вопреки предположению, что E простое. Это доказывает наше утверждение.

Применяя теперь теорему 11, заключаем, что E — модуль, индуцированный F, что и доказывает теорему 13 в том случае, когда E — точный модуль.

Предположим теперь, что E неточный. Пусть G_0 — нормальная подгруппа в G, служащая ядром представления $G \to \mathrm{Aut}_k(E)$. Положим $\bar{G} = G/G_0$. Тогда E дает точное представление для $\bar{G}$. Поскольку E неодномерно, $\bar{G}$ неабелева и существуют собственная подгруппа $\bar{H}$ в $\bar{G}$ и простое $\bar{H}$-пространство F, такие, что

$$E = \mathrm{Tr}_{\bar{G}}^{\bar{H}}(F).$$

Пусть H — полный прообраз $\bar{H}$ при естественном отображении $G \to \bar{G}$. Тогда $H \supset G_0$ и F — простое H-пространство. При действии $\bar{G}$ как группы перестановок на множестве k-подпространств $\{\sigma F\}_{\sigma \in G}$, как мы знаем, $\bar{H}$ есть подгруппа изотропии одного из элементов. Следовательно, H есть подгруппа изотропии в G при том же самом действии. Снова применяя теорему 11, заключаем, что E индуцировано F, т. е.

$$E = \mathrm{Tr}_G^H(F),$$

и тем самым теорема 13 доказана.

Следствие. *Пусть G — произведение p-группы и циклической группы, k — алгебраически замкнутое поле*, $\mathrm{char}\, k \nmid (G:1)$. *Если E — простое (G, k)-пространство и* $\dim_k E > 1$, *то E индуцируется одномерным представлением некоторой подгруппы.*

Доказательство. Применяем теорему шаг за шагом, используя транзитивность индуцированных представлений, пока не получим одномерное представление некоторой подгруппы.

§ 10. Теорема Брауэра

Пусть $k = \mathbf{C}$ — поле комплексных чисел, R — некоторое подкольцо в k. Мы будем иметь дело с кольцом $X_R(G)$, состоящим из всех линейных комбинаций с коэффициентами в R простых характеров G над k. (Это множество является кольцом в силу предложения 2 § 2.)