образом, пространства $\{\bar{c}^{-1}F\}$ различны, и мы имеем разложение в прямую сумму

$$E = \coprod_{c} \bar{c}^{-1}F.$$

Если W — собственное H_1-подпространство в F, то $\coprod \bar{c}^{-1}W$ — собственное G-подпространство в E, вопреки предположению, что E простое. Это доказывает наше утверждение.

Применяя теперь теорему 11, заключаем, что E — модуль, индуцированный F, что и доказывает теорему 13 в том случае, когда E — точный модуль.

Предположим теперь, что E неточный. Пусть G_0 — нормальная подгруппа в G, служащая ядром представления $G \to \mathrm{Aut}_k(E)$. Положим $\bar{G} = G/G_0$. Тогда E дает точное представление для $\bar{G}$. Поскольку E неодномерно, $\bar{G}$ неабелева и существуют собственная подгруппа $\bar{H}$ в $\bar{G}$ и простое $\bar{H}$-пространство F, такие, что

$$E = \mathrm{Tr}_{\bar{G}}^{\bar{H}}(F).$$

Пусть H — полный прообраз $\bar{H}$ при естественном отображении $G \to \bar{G}$. Тогда $H \supset G_0$ и F — простое H-пространство. При действии $\bar{G}$ как группы перестановок на множестве k-подпространств $\{\sigma F\}_{\sigma \in G}$, как мы знаем, $\bar{H}$ есть подгруппа изотропии одного из элементов. Следовательно, H есть подгруппа изотропии в G при том же самом действии. Снова применяя теорему 11, заключаем, что E индуцировано F, т. е.

$$E = \mathrm{Tr}_G^H(F),$$

и тем самым теорема 13 доказана.

Следствие. *Пусть G — произведение p-группы и циклической группы, k — алгебраически замкнутое поле,* $\mathrm{char}\, k \nmid (G:1)$. *Если E — простое (G, k)-пространство и $\dim_k E > 1$, то E индуцируется одномерным представлением некоторой подгруппы.*

Доказательство. Применяем теорему шаг за шагом, используя транзитивность индуцированных представлений, пока не получим одномерное представление некоторой подгруппы.

§ 10. *Теорема Брауэра*

Пусть $k = \mathbf{C}$ — поле комплексных чисел, R — некоторое подкольцо в k. Мы будем иметь дело с кольцом $X_R(G)$, состоящим из всех линейных комбинаций с коэффициентами в R простых характеров G над k. (Это множество является кольцом в силу предложения 2 § 2.)

Пусть $H = \{H_\alpha\}$ — фиксированное семейство подгрупп в G, занумерованное индексами $\{\alpha\}$, и $V_R(G)$ — аддитивная подгруппа в $X_R(G)$, порожденная всеми функциями, которые индуцируются функциями из $X_R(H_\alpha)$ с H_α из нашего семейства. Другими словами,

$$V_R(G) = \sum_\alpha \mathrm{Tr}_G^{H_\alpha}(X_R(H_\alpha)).$$

Мы могли бы также сказать, что $V_R(G)$ — подгруппа, порожденная над R всеми характерами, индуцированными со всех H_α.

Лемма 1. *$V_R(G)$ есть идеал в $X_R(G)$.*

Доказательство. Это непосредственно вытекает из теоремы 10 (ii) § 6.

Во многих приложениях семейство подгрупп будет состоять из „элементарных" подгрупп. Пусть p — простое число. Под *p-элементарной группой* мы будем понимать произведение p-группы и циклической группы (порядок которой может предполагаться взаимно простым с p, поскольку мы можем включить p-часть циклического множителя в p-группу). Элемент $\sigma \in G$ называется *p-регулярным*, если его период взаимно прост с p, и *p-сингулярным*, если его период есть степень p. Каждый элемент $x \in G$ мы можем единственным образом представить в виде

$$x = \sigma\tau,$$

где элемент σ p-сингулярен, τ p-регулярен и σ, τ коммутируют. Действительно, если $p^r m$ — период x, где m взаимно просто с p, то $1 = \nu p^r + \mu m$, откуда $x = (x^m)^\mu \left(x^{p^r}\right)^\nu$, что и дает нам наше разложение. Оно, очевидно, единственно, так как множители лежат в циклической подгруппе, порожденной x. Мы будем называть эти два множителя *p-сингулярным и p-регулярным множителями* x соответственно.

Предыдущее разложение показывает также, что имеет место

Предложение 17. *Все подгруппы и факторгруппы p-элементарной группы p-элементарны. Если S — подгруппа p-элементарной группы $P \times C$, где P — p-группа, а C — циклическая группа взаимно простого с p порядка, то $S = (S \cap P) \times (S \cap C)$.*

Доказательство. Очевидно.

Наша цель — показать среди прочего, что если семейство $\{H_\alpha\}$ таково, что всякая p-элементарная подгруппа в G содержится в некоторой H_α, то $V_R(G) = X_R(G)$ для любого кольца R. Разумеется, это было бы достаточно сделать для $R = \mathbf{Z}$, но для наших целей необходимо сначала доказать этот результат, используя некоторое большее кольцо. Основной результат содержится в теоремах 15 и 16, принадлежащих Брауэру. Мы дадим изложение Брауэра — Тейта (Brauer R., Tate J., On the characters of finite groups, *Ann. of Math.*, **62** (1955), 1—7.)

Пусть R — кольцо $\mathbf{Z}[\zeta]$, где ζ — примитивный корень n-й степени из единицы. В R как $\mathbf{Z}$-модуле имеется базис, а именно $1, \zeta, \ldots, \zeta^{N-1}$, где N — некоторое целое число. Это тривиальный факт; мы можем взять в качестве N степень неприводимого многочлена элемента ζ над $\mathbf{Q}$. У этого неприводимого многочлена старший коэффициент равен 1 и все другие коэффициенты — целые числа, так что тот факт, что

$$1, \zeta, \ldots, \zeta^{N-1}$$

образуют базис $\mathbf{Z}[\zeta]$, вытекает из алгоритма Евклида. Больше ничего об этой степени N нам знать не нужно.

Мы докажем наше утверждение сначала для только что введенного кольца R. Остальное затем будет следовать из приводимой ниже леммы.

Лемма 2. *Если $d \in \mathbf{Z}$ и постоянная функция $d \cdot 1_G$ принадлежит V_R, то $d \cdot 1_G$ принадлежит $V_{\mathbf{Z}}$.*

Доказательство. Мы утверждаем, что $1, \zeta, \ldots, \zeta^{N-1}$ линейно независимы над $X_{\mathbf{Z}}(G)$. Действительно, соотношение линейной зависимости давало бы

$$\sum_{\nu=1}^{s} \sum_{j=0}^{N-1} c_{\nu j}\chi_\nu \zeta^j = 0,$$

где $c_{\nu j}$ — целые числа, не все равные 0. Но простые характеры линейно независимы над k. Предыдущее же соотношение есть соотношение между этими простыми характерами с коэффициентами в R, и мы получаем противоречие. Мы заключаем поэтому, что

$$V_R = V_{\mathbf{Z}} \oplus V_{\mathbf{Z}}\zeta \oplus \ldots \oplus V_{\mathbf{Z}}\zeta^{N-1}$$

есть прямая сумма (абелевых групп), и наша лемма доказана.

Если мы сможем доказать, что постоянная функция 1_G лежит в $V_R(G)$, то в силу леммы отсюда будет следовать, что она лежит в $V_{\mathbf{Z}}(G)$, и поскольку $V_{\mathbf{Z}}(G)$ — идеал, $X_{\mathbf{Z}}(G) = V_{\mathbf{Z}}(G)$.

Для доказательства нам потребуется ряд лемм.

Два элемента x, x' из G называются *p-сопряженными*, если их p-регулярные множители сопряжены в обычном смысле. Ясно, что p-сопряженность есть отношение эквивалентности; классы эквивалентности будут называться *классами p-сопряженных элементов* или просто *p-классами*.

Лемма 3. *Пусть $f \in X_R(G)$, причем $f(\sigma) \in \mathbf{Z}$ для всех $\sigma \in G$. Тогда f постоянна по модулю p на каждом p-классе.*

Доказательство. Пусть $x = \sigma\tau$, где элемент σ p-сингулярен, а τ p-регулярен и σ, τ коммутируют. Достаточно доказать, что

$$f(x) \equiv f(\tau) \qquad (\mathrm{mod}\ p).$$

Пусть H — циклическая подгруппа, порожденная x. Тогда ограничение f на H может быть записано в виде

$$f_H = \sum a_j \psi_j,$$

где $a_j \in R$ и ψ_j — простые характеры H, т. е. гомоморфизмы H в k^*. Для некоторой степени p^r мы имеем $x^{p^r} = \tau^{p^r}$, откуда $\psi_j(x)^{p^r} = \psi_j(\tau)^{p^r}$ и, следовательно,

$$f(x)^{p^r} \equiv f(\tau)^{p^r} (\mathrm{mod}\ \mathfrak{P}),$$

где $\mathfrak{P}$ — максимальный идеал в R, лежащий над p. А так как по условию $f(x)$, $f(\tau) \in \mathbf{Z}$ и $\mathfrak{P} \cap \mathbf{Z} = (p)$, то $f(x)^{p^r} \equiv f(\tau)^{p^r} (\mathrm{mod}\ p)$. Остается заметить, что $b^{p^r} \equiv b\,(\mathrm{mod}\ p)$ для любого целого числа p.

Лемма 4. *Пусть τ — p-регулярный элемент в G, T — циклическая подгруппа, порожденная τ, и C — подгруппа в G, состоящая из всех элементов, коммутирующих с τ. Пусть, далее, P — силовская p-подгруппа в C. Тогда существует элемент $\psi \in X_R(T \times P)$, такой, что индуцированная функция $f = \psi^*$ обладает следующими свойствами*:

(1) $f(\sigma) \in \mathbf{Z}$ *для всех* $\sigma \in G$.

(2) $f(\sigma) = 0$, *если σ не принадлежит p-классу элемента* τ.

(3) $f(\tau) = (C : P) \not\equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ p)$.

Доказательство. Отметим прежде всего, что подгруппа в G, порожденная T и P, является прямым произведением $T \times P$. Пусть $\psi_1, \ldots, \psi_r$ — простые характеры циклической группы T. Предположим, что они продолжены на $T \times P$ посредством композиции с проекцией

$$T \times P \to T \to k^*.$$

Эти продолжения мы по-прежнему обозначаем через $\psi_1, \ldots, \psi_r$. Положим

$$\psi = \sum_{\nu=1}^{r} \overline{\psi_\nu(\tau)}\, \psi_\nu.$$

Соотношения ортогональности для простых характеров на T показывают, что

$$\psi(\tau y) = \psi(\tau) = (T:1) \qquad \text{для } y \in P,$$
$$\psi(\sigma) = 0, \text{ если } \sigma \in TP \qquad \text{и } \sigma \notin \tau P.$$

Мы утверждаем, что ψ^* удовлетворяет нашим требованиям.

Прежде всего ясно, что ψ лежит в $X_R(TP)$.

Для $\sigma \in G$ имеем

$$\psi^*(\sigma) = \frac{1}{(TP:1)} \sum_{x \in G} \psi_0(x\sigma x^{-1}) = \frac{1}{(P:1)} \mu(\sigma),$$

где $\mu(\sigma)$ — число элементов $x \in G$, таких, что $x\sigma x^{-1}$ лежит в τP. Число $\mu(\sigma)$ делится на $(P:1)$, поскольку если элемент x из G переводит σ посредством сопряжения в τP, то тем же свойством обладает всякий элемент из Px. Следовательно, значения ψ^* лежат в $\mathbf{Z}$.

Далее, $\mu(\sigma) \neq 0$ только для p-сопряженного с τ элемента σ, откуда вытекает наше условие (2).

Наконец, равенство $x\tau x^{-1} = \tau y$ с $y \in P$ возможно только при $y = 1$ (так как период τ взаимно прост с p). Следовательно, $\mu(\tau) = (C:1)$, откуда следует наше условие (3).

Лемма 5. *Предположим, что семейство подгрупп $\{H_\alpha\}$ покрывает G (т. е. всякий элемент из G лежит в некоторой подгруппе H_α). Если f — функция классов на G, принимающая значение в $\mathbf{Z}$ и такая, что все ее значения делятся на $n = (G:1)$, то f принадлежит $V_R(G)$.*

Доказательство. Пусть γ — некоторый класс сопряженных элементов и p взаимно просто с n. Всякий элемент из G p-регулярен и все p-подгруппы в G тривиальны, так что в этом случае p-сопряженность есть то же самое, что сопряженность. Применяя лемму 4, мы найдем, что в $V_R(G)$ имеется функция, принимающая значение 0 на элементах $\sigma \notin \gamma$ и принимающая целочисленное значение, делящее n на элементах из γ. Умножая эту функцию на некоторое целое число, мы найдем, что в $V_R(G)$ имеется функция, принимающая значения n на всех элементах из γ и значение 0 на всех других элементах. Отсюда лемма следует непосредственно.

Теорема 14 (Артин). *Всякий характер группы G есть линейная комбинация с рациональными коэффициентами характеров, индуцированных с циклических подгрупп.*

Доказательство. Пусть в лемме 5 $\{H_\alpha\}$ — семейство циклических подгрупп группы G. Постоянная функция $n \cdot 1_G$ принадлежит

$V_R(G)$. В силу леммы 2 эта функция принадлежит $V_{\mathbf{Z}}(G)$, и, следовательно, $nX_{\mathbf{Z}}(G) \subset V_{\mathbf{Z}}(G)$. Таким образом,

$$X_{\mathbf{Z}}(G) \subset \frac{1}{n} V_{\mathbf{Z}}(G),$$

что и доказывает теорему.

Лемма 6. *Пусть p — простое число, и пусть всякая p-элементарная подгруппа группы G содержится в некоторой H_α. Тогда существует функция $f \in V_R(G)$, значения которой лежат в $\mathbf{Z}$ и $\equiv 1 \pmod{p^r}$.*

Доказательство. Применим леммы 3 и 4. Для всякого p-класса γ мы можем найти функцию f_γ из $V_R(G)$, значения которой равны 0 вне γ и $\not\equiv 0 \bmod p$ для элементов из γ. Пусть $f = \sum_\gamma f_\gamma$, где сумма берется по всем p-классам. Тогда $f(\sigma) \not\equiv 0 \pmod p$ для всех $\sigma \in G$ и $f^{(p-1)\,p^{r-1}}$ дает искомую функцию.

Лемма 7. *Пусть p — простое число, и пусть всякая p-элементарная подгруппа группы G содержится в некоторой H_α. Пусть, далее, $n = n_0 p^r$, где n_0 взаимно просто с p. Тогда постоянная функция $n_0 \cdot 1_G$ принадлежит $V_Z(G)$.*

Доказательство. В силу леммы 2 достаточно доказать, что $n_0 \cdot 1_G$ принадлежит $V_R(G)$. Пусть f — функция из леммы 6. Тогда

$$n_0 \cdot 1_G = n_0(1_G - f) + n_0 f.$$

Так как все значения функции $n_0(1_G - f)$ делятся на $n_0 p^r = n$, то эта функция лежит в $V_R(G)$, согласно лемме 5. С другой стороны, $n_0 f \in V_R(G)$, поскольку $f \in V_R(G)$. Это доказывает нашу лемму.

Теорема 15 (Брауэр). *Предположим, что для всякого простого числа p любая p-элементарная подгруппа группы G содержится в некоторой H_α. Тогда $X(G) = V_{\mathbf{Z}}(G)$. Всякий характер группы G есть линейная комбинация с целочисленными коэффициентами характеров, индуцированных с подгрупп H_α.*

Доказательство. Это непосредственное следствие леммы 7, так как мы можем найти в $V_{\mathbf{Z}}(G)$ функции $n_0 \cdot 1_G$ с n_0, взаимно простым с любым заданным простым числом.

Следствие. *Функция классов f на G тогда и только тогда принадлежит $X(G)$, когда ее ограничение на H_α принадлежит $X(H_\alpha)$ для каждого α.*

Доказательство. Предположим, что для каждого α ограничение f на H_α есть характер на H_α. В силу теоремы мы можем записать

$$1_G = \sum_\alpha c_\alpha \operatorname{Tr}_G^{H_\alpha}(\psi_\alpha),$$

где $c_\alpha \in \mathbf{Z}$ и $\psi_\alpha \in X(H_\alpha)$. Следовательно,

$$f = \sum_\alpha c_\alpha \operatorname{Tr}_G^{H_\alpha}\left(\psi_\alpha f_{H_\alpha}\right),$$

согласно теореме 10 (ii) § 6. Поэтому если $f_{H_\alpha} \in X\left(H_\alpha\right)$, то f принадлежит $X(G)$. Обратное, разумеется, тривиально.

Теорема 16 (Брауэр). *Всякий характер на G есть линейная комбинация с целочисленными коэффициентами характеров, индуцированных одномерными характерами подгрупп.*

Доказательство. В силу теоремы 15 и транзитивности индуцирования достаточно доказать, что всякий характер p-элементарной группы обладает свойством, сформулированным в теореме. Но мы уже доказали это в предыдущем параграфе (следствие теоремы 13).

§ 11. Поле определения представления

Пусть k — поле, G — группа и E — k-пространство. Предположим, что имеется представление G на E. Пусть k' — расширение поля k. Тогда G действует на $k' \otimes_k E$ по правилу

$$\sigma(a \otimes x) = a \otimes \sigma x$$

для $a \in k'$ и $x \in E$. Это отображение возникает из билинейного отображения произведения $k' \times E$, задаваемого соответствием

$$(a, x) \longmapsto a \otimes \sigma x.$$

Рассматривая $E' = k' \otimes_k E$ как расширение E посредством k', мы получаем представление G на E'.

Предложение 18. *Пусть обозначения те же, что и выше. Тогда характеры представлений группы G на E и на E' равны.*

Доказательство. Пусть $\{v_1, \ldots, v_m\}$ — базис E над k. Тогда

$$\{1 \otimes v_1, \ldots, 1 \otimes v_m\}$$

— базис E' над k'. Таким образом, матрицы, представляющие элемент σ из G относительно этих двух базисов, равны и, следовательно, равны их следы.