Доказательство. Предположим, что для каждого α ограничение f на H_α есть характер на H_α. В силу теоремы мы можем записать

$$1_G = \sum_\alpha c_\alpha \operatorname{Tr}_G^{H_\alpha}(\psi_\alpha),$$

где $c_\alpha \in \mathbf{Z}$ и $\psi_\alpha \in X(H_\alpha)$. Следовательно,

$$f = \sum_\alpha c_\alpha \operatorname{Tr}_G^{H_\alpha}\left(\psi_\alpha f_{H_\alpha}\right),$$

согласно теореме 10 (ii) § 6. Поэтому если $f_{H_\alpha} \in X(H_\alpha)$, то f принадлежит $X(G)$. Обратное, разумеется, тривиально.

Теорема 16 (Брауэр). *Всякий характер на G есть линейная комбинация с целочисленными коэффициентами характеров, индуцированных одномерными характерами подгрупп.*

Доказательство. В силу теоремы 15 и транзитивности индуцирования достаточно доказать, что всякий характер p-элементарной группы обладает свойством, сформулированным в теореме. Но мы уже доказали это в предыдущем параграфе (следствие теоремы 13).

§ 11. Поле определения представления

Пусть k — поле, G — группа и E — k-пространство. Предположим, что имеется представление G на E. Пусть k' — расширение поля k. Тогда G действует на $k' \otimes_k E$ по правилу

$$\sigma(a \otimes x) = a \otimes \sigma x$$

для $a \in k'$ и $x \in E$. Это отображение возникает из билинейного отображения произведения $k' \times E$, задаваемого соответствием

$$(a, x) \longmapsto a \otimes \sigma x.$$

Рассматривая $E' = k' \otimes_k E$ как расширение E посредством k', мы получаем представление G на E'.

Предложение 18. *Пусть обозначения те же, что и выше. Тогда характеры представлений группы G на E и на E' равны.*

Доказательство. Пусть $\{v_1, \ldots, v_m\}$ — базис E над k. Тогда

$$\{1 \otimes v_1, \ldots, 1 \otimes v_m\}$$

— базис E' над k'. Таким образом, матрицы, представляющие элемент σ из G относительно этих двух базисов, равны и, следовательно, равны их следы.

Обратно, пусть k' — поле и k — подполе. Представление G на k'-пространстве E' называется *определимым над* k, если существуют k-пространство E и представление G на E, такие, что E' G-изоморфно $k' \otimes_k E$.

Предложение 19. *Пусть E, F — пространства над k простых представлений конечной группы G. Пусть k' — расширение k. Предположим, что E, F не являются G-изоморфными. Тогда никакая k'-простая компонента пространства $E^{k'}$ не встречается в разложении $F^{k'}$ в прямую сумму k'-простых подпространств.*

Доказательство. Рассмотрим разложение

$$k[G] = \prod_{\mu=1}^{s(k)} R_\mu(k)$$

над k в прямую сумму простых колец. Не теряя общности, мы можем предполагать, что E, F — простые левые идеалы в $k[G]$: по предположению они будут принадлежать различным множителям этого произведения. Если мы теперь возьмем тензорное произведение с k', то получим не что иное, как $k'[G]$. Тем самым мы будем иметь разложение в прямое произведение над k'. Так как $R_\nu(k) R_\mu(k) = 0$ при $\nu \neq \mu$, то оно будет в действительности получаться разложением в прямое произведение каждого множителя $R_\mu(k)$

$$k'[G] = \prod_{\mu=1}^{s(k)} \prod_{i=1}^{m(\mu)} R_{\mu i}(k').$$

Пусть, скажем, $E = L_\nu$ и $F = L_\mu$, где $\nu \neq \mu$. Тогда $R_\mu E = 0$. Следовательно, $R_{\mu i} E^{k'} = 0$ для всякого $i = 1, \ldots, m(\mu)$. Отсюда вытекает, что никакая простая компонента в $E^{k'}$ не может быть G-изоморфна никакому из простых левых идеалов колец $R_{\mu i}$, а это и доказывает то, что нам было нужно.

Следствие. *Простые характеры $\chi_1, \ldots, \chi_{s(k)}$ группы G над k линейно независимы над любым расширением k' поля k.*

Доказательство. Это тотчас вытекает из предложения и линейной независимости k'-простых характеров над k'.

Предложения 18 и 19 являются по существу общими утверждениями совершенно абстрактной природы. В доказательстве следующей теоремы используется теорема Брауэра.

Теорема 17 (Брауэр). *Пусть G — конечная группа показателя m. Всякое представление G над полем комплексных чисел (или над алгебраически замкнутым полем характеристики 0)* *определим над полем* $\mathbf{Q}(\zeta_m)$, *где* ζ_m — *примитивный корень* m-*й степени из единицы.*

Доказательство. Пусть χ — характер некоторого представления G над $\mathbf{C}$, т. е. собственный характер. В силу теоремы 16 мы можем записать

$$\chi = \sum_j c_j Tr_G^{S_j}(\psi_j), \qquad c_i \in \mathbf{Z},$$

где сумма берется по конечному числу подгрупп S_j и ψ_j — одномерный характер S_j. Ясно, что каждый характер ψ_j определим над $\mathbf{Q}(\zeta_m)$. Таким образом, определим над $\mathbf{Q}(\zeta_m)$ и индуцированный характер ψ_j^*, который может быть записан в виде

$$\psi_j^* = \sum_\mu d_{j\mu}\chi_\mu, \qquad d_{j\mu} \in \mathbf{Z},$$

где $\{\chi_\mu\}$ — простые характеры G над $\mathbf{Q}(\zeta_m)$. Следовательно,

$$\chi = \sum_\mu \Big(\sum_j c_j d_{j\mu}\Big)\chi_\mu.$$

Представление χ в виде линейной комбинации простых характеров над k единственно, и, следовательно, коэффициент

$$\sum_j c_j d_{j\mu}$$

$\geqslant 0$. Это доказывает все, что нам было нужно.

УПРАЖНЕНИЯ

Первые упражнения посвящены соотношениям ортогональности для коэффициентов матричных представлений. Эти соотношения являются несколько более общими, чем соотношения для характеров. Доказательства не зависят от изложения, данного в тексте, и, следовательно, дают альтернативный подход к получению тех же результатов, *не зависящий от предыдущей главы.* Используются только лемма Шура и полная приводимость.

1. Пусть G — конечная группа, k — произвольное поле, E, F — простые (G, k)-пространства и λ — k-линейный функционал на E. Пусть $x \in E$ и $y \in F$. Показать, что если E, F неизоморфны, то

$$\sum_{\sigma \in G} \lambda(\sigma x)\sigma^{-1}y = 0.$$

[*Указание*: для фиксированного y отображение $x \mapsto \sum \lambda(\sigma x)\sigma^{-1}y$ является G-гомоморфизмом E в F.] В частности, для любого функционала μ на F

$$\sum_{\sigma \in G} \lambda(\sigma x)\mu(\sigma^{-1}y) = 0.$$

2. Показать, что утверждение упражнения 1 можно применить к каждому коэффициенту матричного представления группы G. В предположении, что

k алгебраически замкнуто и имеет характеристику, не делящую порядок G, вывести соотношение ортогональности $\langle\chi, \psi\rangle = 0$ для двух различных неприводимых характеров χ, ψ группы G над k, где скалярное произведение двух функций f, g на G определяется формулой

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{n}\sum_{\sigma\in G} f(\sigma)\, g(\sigma^{-1}).$$

Как обычно, n обозначает порядок группы G.

3. Пусть k — алгебраически замкнутое поле и E — простое (G, k)-пространство. Тогда любой G-эндоморфизм пространства E равен скалярному кратному тождественного. [*Указание*: тело $\mathrm{End}_{G,k}(E)$ конечномерно над k и, следовательно, совпадает с k.]

4. Пусть поле k алгебраически замкнуто, причем его характеристика не делит порядок G, E — векторное пространство размерности d над k.

(а) Пусть λ — функционал на E, $x\in E$ и $\varphi_{\lambda,x}\in\mathrm{End}_k(E)$ — эндоморфизм, для которого

$$\varphi_{\lambda,x}(y) = \lambda(y)\,x \quad \text{при всех} \quad y\in E.$$

Показать, что $\mathrm{tr}(\varphi_{\lambda,x}) = \lambda(x)$. [*Указание*: элемент $x\neq 0$ дополнить до подходящего базиса E и вычислить след относительно этого базиса.]

(б) Пусть $\rho\colon E\to \mathrm{Aut}_k E$ — простое представление группы G, и пусть x, $y\in E$. Тогда характеристика поля k не делит d и

$$\sum_{\sigma\in G}\lambda(\sigma x)\,\sigma^{-1}y = \frac{n}{d}\lambda(y)\,x.$$

Указание: для фиксированного y отображение

$$x\longmapsto \sum_{\sigma\in G}\lambda(\sigma x)\,\sigma^{-1}y$$

есть G-гомоморфизм пространства E в себя; следовательно, оно имеет вид cI для некоторого $c\in k$. В действительности оно равно

$$\sum_{\sigma\in G}\sigma^{-1}\circ\varphi_{\lambda,y}\circ\sigma.$$

Для простоты мы написали σ вместо $\rho(\sigma)$. След этого выражения равен, с одной стороны, $n\,\mathrm{tr}(\varphi_{\lambda,y})$, с другой стороны, dc. Выберем λ, y так, чтобы $\lambda(y)=1$. Это показывает, что характеристика не делит d, и, значит, c можно выразить требуемым образом.]

(в) Если λ, μ — функционалы на E, то

$$\sum_{\sigma\in G}\lambda(\sigma x)\,\mu(\sigma^{-1}y) = \frac{n}{d}\lambda(y)\,\mu(x).$$

5. (а) Пусть χ — характер представления из упражнения 4. Показать, что $\langle\chi,\chi\rangle = 1$. [*Указание*: рассматривая ρ как матричное представление, имеем

$$\chi = \rho_{11} + \ldots + \rho_{dd}.]$$

В частности, если $\chi_1, \ldots, \chi_s$ — простые характеры и если положить

$$e_i = \frac{d_i}{n}\sum_{\sigma\in G}\chi_i(\sigma)\,\sigma^{-1},$$

то $\chi_j(e_i) = \delta_{ij}d_i$.

(б) Считая известным, что $\chi_{\mathrm{reg}}(\sigma) = 0$ для $\sigma \neq 1$ и $\chi_{\mathrm{reg}}(1) = n$, показать, что $\chi_{\mathrm{reg}} = \sum d_i \chi_i$, где d_i — размерность χ_i. [*Указание*: записать $\chi_{\mathrm{reg}} = \sum m_j \chi_j$ и вычислить скалярное произведение с χ_i, пользуясь соотношениями ортогональности, а также определениями.] Значения характера регулярного представления очевидны.

(в) Показать, что каждый элемент e_i может быть представлен в виде суммы классов сопряженных элементов с коэффициентами в k и, следовательно, лежит в центре алгебры $k[G]$.

(г) Пусть E_i — любое пространство представления для χ_i и ρ_i — соответствующее представление G (или $k[G]$) на E_i. Для $\alpha \in k[G]$ пусть $\rho_i(\alpha)$: $E_i \to E_i$ — такое отображение, что $\rho_i(\alpha) x = \alpha x$ для всех $x \in E_i$. Показать, что $\rho_i(e_i) = \mathrm{id}$ и что $\rho_i(e_j) = 0$ при $i \neq j$. [*Указание*: отображение $x \longmapsto e_i x$ в силу (в) есть G-гомоморфизм E_j в себя, и поэтому в соответствии с упражнением 3 является скалярным кратным тождественного. Если взять след и использовать соотношения ортогональности между простыми характерами, то, как тривиально вычисляется, это кратное равно соответственно 1 или 0.]

(д) Показать, что $\sum_{i=1}^{s} e_i = 1$.

(е) Пусть α лежит в центре $k[G]$. Тогда для любого i автоморфизм $\rho_i(\alpha)$ является кратным тождественного на E_i, скажем

$$\rho_i(\alpha) = c_i \rho_i(e_i) = c_i \cdot id_{E_i}, \qquad c_i \in k.$$

Вывести отсюда, что $\alpha = c_1 e_1 + \ldots + c_s e_s$ и что, следовательно, центр $Z_k[G]$ групповой алгебры $k[G]$ над k имеет размерность точно s. В частности, имеется точно s классов сопряженных элементов $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$, которые также образуют базис центра $Z_k[G]$. [*Указание*: линейная комбинация $c_1 e_1 + \ldots$ $\ldots + c_s e_s$ действует на каждом E_i так же, как и α. Поскольку $k[G]$ изоморфна прямой сумме $\coprod d_i E_i$, отсюда вытекает, что α равно этой линейной комбинации.]

6. Пусть f — функция классов. Показать, что

$$f = \sum_{i=1}^{s} \langle f, \chi_i \rangle \chi_i.$$

Для двух функций классов f, g вывести *формулу Планшереля*, а именно

$$\langle f, g \rangle = \sum_{i=1}^{s} \langle f, \chi_i \rangle \langle \chi_i, g \rangle.$$

7. Пусть $\rho^{(i)}$ обозначает представление унитарными матрицами на E_i и пусть $\rho_{\nu\mu}^{(i)}$ — коэффициенты этих матриц, рассматриваемые как функции на G ($i = 1, \ldots, s$ и $\nu, \mu = 1, \ldots, d_i$). Показать, что эти функции $\left\{\rho_{\nu\mu}^{(i)}\right\}$ образуют ортогональный базис относительно эрмитовой метрики пространства функций на G и что, следовательно, для любой функции f (не обязательно функции классов) мы имеем

$$f = \sum_{i=1}^{s} \sum_{\nu, \mu} \frac{1}{d_i} \left\langle f, \rho_{\nu\mu}^{(i)} \right\rangle \rho_{\nu\mu}^{(i)}.$$

8. Следующий формализм аналогичен артиновскому формализму L-рядов в теории чисел. (См. работу Артина „Zur Theorie der L-Reihen mit allgemeinen Gruppencharakteren" (A r t i n E., Collected papers, 1965), а также L a n g S., L-series of a covering, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, 1956.)

Мы рассматриваем некоторую категорию с объектами $\{U\}$. Как обычно, мы говорим, что конечная группа G действует на U, если задан гомоморфизм ρ: $G \to \mathrm{Aut}(U)$. При этом мы говорим, что U есть G-объект, а также, что ρ есть представление G на U. Мы говорим, что G действует тривиально, если $\rho(G) = \mathrm{id}$. Для простоты мы будем опускать ρ в обозначениях. Под G-морфизмом f: $U \to V$ между G-объектами понимают такой морфизм, что $f \circ \sigma = \sigma \circ f$ для всех $\sigma \in G$.

Мы будем предполагать, что для всякого G-объекта U существует объект U/G, на котором G действует тривиально, и G-морфизм $\pi_{U,G}$: $U \to U/G$, обладающий следующим универсальным свойством. Для всякого G-морфизма $U \to V$, где V — G-объект, на котором G действует тривиально, существует однозначно определенный морфизм $U/G \to V$, такой, что следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r] \arrow[dr] & U/G \arrow[d] \\ & V \end{tikzcd}$$

Тогда если f: $U \to U'$ — произвольный G-морфизм, то существует однозначно определенный морфизм f/G: $U/G \to U'/G$, для которого коммутативна следующая диаграмма:

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "f"] \arrow[d] & U' \arrow[d] \\ U/G \arrow[r, "f/G"'] & U'/G \end{tikzcd}$$

Показать, в частности, что если H — нормальная подгруппа в G, то G/H естественным образом действует на U/H.

Пусть k — алгебраически замкнутое поле характеристики 0. Предположим, что задан некоторый функтор E из нашей категории в категорию конечномерных k-пространств. Если U — объект из нашей категории и $f: U \to U'$ — некоторый морфизм, то получаем гомоморфизм

$$E(f) = f_*: E(U) \to E(U').$$

(Читатель может иметь в виду частный случай, когда мы имеем дело с категорией подходящих топологических пространств, а E — гомологический функтор некоторой данной размерности.)

Если G действует на U, то в силу функториальности мы получаем действие G на $E(U)$.

Пусть U — некоторый G-объект, F: $U \to U$ — G-морфизм и $P_F(t) = \prod (t - \alpha_i)$ — характеристический многочлен линейного отображения F_*: $E(U) \to E(U)$. Положим

$$Z_F(t) = \prod (1 - \alpha_i t)$$

и будем называть это выражение *дзета-функцией* F. Если F — тождественный морфизм, то $Z_F(t) = (1-t)^{B(U)}$, где $B(U)$ обозначает $\dim_k E(U)$.

Пусть χ — простой характер группы G, d_χ — размерность простого представления группы G, принадлежащего χ, и $n = (G:1)$. Определим линейное отображение на $E(U)$, положив

$$e_\chi = \frac{d_\chi}{n} \sum_{\sigma \in G} \chi(\sigma^{-1}) \sigma_*.$$

Показать, что $e_\chi^2 = e_\chi$ и что для любого положительного целого числа μ имеет место равенство $(e_\chi \circ F_*)^\mu = e_\chi \circ F_*^\mu$.

Пусть $P_\chi(t) = \prod (t - \beta_j(\chi))$ — характеристический многочлен отображения $e_\chi \circ F_*$. Полагаем

$$L_F(t, \chi, U/G) = \prod (1 - \beta_j(\chi) t).$$

Показать, что логарифмическая производная этой функции равна

$$-\sum_{\mu=1}^{\infty} \operatorname{tr}\left(e_\chi \circ F_*^\mu\right) t^{\mu-1}.$$

Определяем $L_F(t, \chi, U/G)$ для произвольных характеров по линейности. Если $V = U/G$, то, допуская вольность в обозначениях, мы будем также писать $L_F(t, \chi, U/V)$. Тогда для любых χ, χ' имеем по определению

$$L_F(t, \chi + \chi', U/V) = L_F(t, \chi, U/V) L_F(t, \chi', U/V).$$

Сделаем одно дополнительное предположение.

Предположим, что характеристический многочлен отображения

$$\frac{1}{n} \sum_{\sigma \in G} \sigma_* \circ F,$$

равен характеристическому многочлену F/G на $E(U/G)$. Доказать следующие утверждения:

(а) Если $G = \{1\}$, то

$$L_F(t, 1, U/U) = Z_F(t).$$

(б) Пусть $f = F/G$. Тогда

$$L_F(t, 1, U/V) = Z_f(t).$$

(в) Пусть H — подгруппа в G и ψ — некоторый характер H. Пусть, далее, $W = U/H$ и ψ^* — индуцированный характор с H на G. Тогда

$$L_F(t, \psi, U/W) = L_F(t, \psi^*, U/V).$$

(г) Пусть подгруппа H нормальна в G. Тогда G/H действует на $U/H = W$. Пусть ψ — некоторый характер G/H, χ — характер G, получаемый композицией ψ с каноническим отображением $G \to G/H$, и $\varphi = F/H$ — морфизм, индуцированный на $U/H = W$. Тогда

$$L_\varphi(t, \psi, W/V) = L_F(t, \chi, U/V).$$

(д) Показать, что если $V = U/G$ и $B(V) = \dim_k \mathrm{E}(V)$, то $(1-t)^{B(V)}$ делит $(1-t)^{B(U)}$. Использовать регулярный характер для получения разложения $(1-t)^{B(U)}$ в произведение.