ОГЛАВЛЕНИЕ

От редактора перевода 5
Предисловие 7
Предварительные сведения 11
Литература 14

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

ГРУППЫ, КОЛЬЦА И МОДУЛИ

Глава I. Группы

§ 1. Моноиды 17
§ 2. Группы 21
§ 3. Циклические группы 25
§ 4. Нормальные подгруппы 27
§ 5. Действие группы на множестве 32
§ 6. Силовские подгруппы 36
§ 7. Категории и функторы 39
§ 8. Свободные группы 47
§ 9. Прямые суммы и свободные абелевы группы 55
§ 10. Конечно порожденные абелевы группы 61
§ 11. Дуальная группа 66
Упражнения 69

Глава II. Кольца

§ 1. Кольца и гомоморфизмы 73
§ 2. Коммутативные кольца 80
§ 3. Локализация 85
§ 4. Кольца главных идеалов 89
Упражнения 92

Глава III. Модули

§ 1. Основные определения 93
§ 2. Группа гомоморфизмов 95
§ 3. Прямые произведения и суммы модулей 98
§ 4. Свободные модули 103
§ 5. Векторные пространства 105
§ 6. Дуальное пространство 108
Упражнения 111

Глава IV. Гомологии

§ 1. Комплексы 114
§ 2. Гомологическая последовательность 116
§ 3. Эйлерова характеристика 118
§ 4. Теорема Жордана — Гёльдера 122
Упражнения 126

Глава V. Многочлены

§ 1. Свободные алгебры 127
§ 2. Определение многочленов 131
§ 3. Элементарные свойства многочленов 136

§ 4. Алгоритм Евклида 141
§ 5. Простейшие дроби 145
§ 6. Однозначность разложения на простые множители многочленов от нескольких переменных 148
§ 7. Критерии неприводимости 151
§ 8. Производная и кратные корни 153
§ 9. Симметрические многочлены 155
§ 10. Результант 158
Упражнения 162

Глава VI. Нётеровы кольца и модули

§ 1. Основные критерии 166
§ 2. Теорема Гильберта 169
§ 3. Степенные ряды 170
§ 4. Ассоциированные простые идеалы 172
§ 5. Примарное разложение 177
Упражнения 181

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

ТЕОРИЯ ПОЛЕЙ

Глава VII. Алгебраические расширения

§ 1. Конечные и алгебраические расширения 185
§ 2. Алгебраическое замыкание 191
§ 3. Поля разложения и нормальные расширения 198
§ 4. Сепарабельные расширения 202
§ 5. Конечные поля 208
§ 6. Примитивные элементы 211
§ 7. Чисто несепарабельные расширения 213
Упражнения 217

Глава VIII. Теория Галуа

§ 1. Расширения Галуа 219
§ 2. Примеры и приложения 227
§ 3. Корни из единицы 232
§ 4. Линейная независимость характеров 237
§ 5. Норма и след 239
§ 6. Циклические расширения 243
§ 7. Разрешимые и радикальные расширения 246
§ 8. Теория Куммера 248
§ 9. Уравнение $X^n - a = 0$ 252
§ 10. Когомологии Галуа 255
§ 11. Алгебраическая независимость гомоморфизмов 256
§ 12. Теорема о нормальном базисе 260
Упражнения 260

Глава IX. Расширения колец

§ 1. Целые расширения колец 268
§ 2. Целые расширения Галуа 275
§ 3. Продолжение гомоморфизмов 282
Упражнения 284

Глава X. Трансцендентные расширения

§ 1. Базисы трансцендентности 286
§ 2. Теорема Гильберта о нулях 288
§ 3. Алгебраические множества 290
§ 4. Теорема Нётера о нормализации 294
§ 5. Линейно свободные расширения 295
§ 6. Сепарабельные расширения 298
§ 7. Дифференцирования 301

Упражнения 305

Глава XI. Вещественные поля

§ 1. Упорядоченные поля 307
§ 2. Вещественные поля 309
§ 3. Вещественные нули и гомоморфизмы 316

Упражнения 321

Глава XII. Абсолютные значения

§ 1. Определения, зависимость и независимость 322
§ 2. Пополнения 325
§ 3. Конечные расширения 332
§ 4. Нормирования 336
§ 5. Пополнения и нормирования 345
§ 6. Дискретные нормирования 346
§ 7. Нули многочленов в полных полях 350

Упражнения 353

ЧАСТЬ ТРЕТЬЯ

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

Глава XIII. Матрицы и линейные отображения

§ 1. Матрицы 361
§ 2. Ранг матрицы 363
§ 3. Матрицы и линейные отображения 364
§ 4. Определители 368
§ 5. Двойственность 378
§ 6. Матрицы и билинейные формы 383
§ 7. Полуторалинейная двойственность 388
Упражнения 393

Глава XIV. Структура билинейных форм

§ 1. Предварительные сведения, ортогональные суммы . . 396
§ 2. Квадратичные отображения 399
§ 3. Симметрические формы, ортогональные базисы 400
§ 4. Гиперболические пространства 402
§ 5. Теорема Витта 403
§ 6. Группа Витта 403
§ 7. Симметрические формы над упорядоченными полями. 408

§ 8. Алгебра Клиффорда 411
§ 9. Знакопеременные формы 415
§ 10. Пфаффиан 417
§ 11. Эрмитовы формы 419
§ 12. Спектральная теорема (эрмитов случай) 421
§ 13. Спектральная теорема (симметрический случай) . . . 423
Упражнения 425

Глава XV. Представление одного эндоморфизма

§ 1. Представления 429
§ 2. Модули над кольцами главных идеалов 432
§ 3. Разложение над одним эндоморфизмом 442
§ 4. Характеристический многочлен 446
Упражнения 452

Глава XVI. Полилинейные произведения

§ 1. Тензорное произведение 456
§ 2. Основные свойства 461
§ 3. Расширение основного кольца 466
§ 4. Тензорное произведение алгебр 468
§ 5. Тензорная алгебра модуля 470
§ 6. Знакопеременные произведения 473
§ 7. Симметрические произведения 477
§ 8. Кольцо Эйлера — Гротендика 478
§ 9. Некоторые функториальные изоморфизмы 481
Упражнения 486

Глава XVII. Полупростота

§ 1. Матрицы и линейные отображения над некоммутативными кольцами 488
§ 2. Условия, определяющие полупростоту 491
§ 3. Теорема плотности 493
§ 4. Полупростые кольца 496
§ 5. Простые кольца 498
§ 6. Сбалансированные модули 501
Упражнения 502

Глава XVIII. Представления конечных групп

§ 1. Полупростота групповой алгебры 504
§ 2. Характеры 506
§ 3. Одномерные представления 511
§ 4. Пространство функций классов 512
§ 5. Соотношения ортогональности 516
§ 6. Индуцированные характеры 520
§ 7. Индуцированные представления 523
§ 8. Положительное разложение регулярного характера. 528
§ 9. Сверхразрешимые группы 530
§ 10. Теорема Брауэра 533
§ 11. Поле определения представления 539
Упражнения 541

Добавление. Трансцендентность e и π 546

Указатель 553