

Предисловие

Я предпочитаю называть ее так [абстрактной алгеброй], а не современной алгеброй, потому что она, несомненно, будет жить долго и в конце концов станет древней алгеброй.

Ф. Севери (Льеж, 1949)

Эта книга может служить основой годового курса алгебры для аспирантов.

К сожалению, объем материала, который слушатель в идеале должен был бы усвоить за год, чтобы получить надлежащую подготовку по алгебре (независимо от того, по какому предмету он специализируется), превышает физические возможности лектора в течение годового курса. Следовательно, книга должна содержать больше материала, чем в действительности может быть изложено в аудитории.

Порядок изучения различных тем допускает многочисленные вариации. Например, к теории полей и теории Галуа можно приступить сразу же после того, как даны основные определения, относящиеся к группам, кольцам, полям, многочленам от одной переменной и векторным пространствам. Поскольку теория Галуа очень быстро создает впечатление глубины, этот путь весьма привлекателен во многих отношениях.

Можно также после ознакомления с основными определениями начать с линейной алгебры, оставив теорию полей на более позднее время. Главы книги написаны таким образом, чтобы обеспечить наибольшую гибкость в этом отношении, и я часто совершаю преступление против бурбакизма, повторяя короткие рассуждения или определения, чтобы сделать некоторые параграфы или главы логически независимыми друг от друга.

В изложении теории Галуа я следую Артину, но с незначительными модификациями. Чтобы прочувствовать различия, читатель может с пользой для себя обратиться к небольшой книжке Артина. Кроме того, читателю стоило бы ознакомиться с изложением, основанным на теореме Джекобсона — Бурбаки, полезной в несепарабельном случае. Однако стандартный случай достаточно важен в большинстве приложений, чтобы оправдать классическое изложение, которое я здесь выбрал.

Поскольку алгебре научил меня Артин, чувство обязанности по отношению к нему пронизывает всю книгу. В меньшей степени это,

возможно, относится к разделу линейной алгебры и представлений, где влияние Бурбаки является более решающим (в содержании, а не в стиле изложения). Однако в выборе материала я более разборчив, чем Бурбаки, с вытекающими отсюда преимуществами и недостатками меньшей энциклопедичности.

Обеспечив изложение материала, который ни при каких обстоятельствах не может быть опущен в основном курсе, можно затем на выбор развивать его в различных направлениях. Невозможно изложить их все с одинаковой полнотой. Точный момент, когда лектор пожелает остановиться в любом из этих направлений, будет зависеть от времени, места и настроения. Например, главы о вещественных полях и абсолютных значениях могут быть без ущерба опущены или же прочитаны слушателями самостоятельно. То же самое относится к главе о представлениях групп. Теорема Витта о квадратичных формах также может быть опущена. Однако любая книга, преследующая те же цели, что и наша, должна включать набор этих тем, ведущих вглубь, но развиваемых ровно настолько, чтобы избежать полной запутанности и излишнего увеличения числа страниц. По всем этим вопросам не может быть достигнуто даже внутренней удовлетворенности автора, не говоря уж о всеобщем согласии. В конечном счете конкретные решения относительно того, что включать и что не включать, принимаются исходя из соображений общей связности и эстетического равновесия. Например, я умышленно избежал чрезмерного углубления в коммутативную алгебру. Я не мог превращать основной курс алгебры исключительно в тренировочный полигон для будущих алгебраических геометров. Однако всякий преподающий этот курс может наложить на материал отпечаток своей индивидуальности и с большей силой, чем у меня, выделить одни темы за счет других. В предлагаемой книге нет ничего, что воспрепятствовало бы этому.

Структура книги все еще удивительно напоминает ту, которая была придана ей Артином, Нётер и Ван дер Варденом примерно тридцать лет тому назад. Я целиком согласен с Ван дер Варденом в вопросе о включении в учебное пособие такого рода теории представлений конечных групп. Ввиду прогресса, достигнутого Брауэром за истекшие тридцать лет, оказалось возможным дать более полное изложение, чем это мог сделать Ван дер Варден в свое время.

Имеются достаточные основания, чтобы включить в курс больше материала о линейных группах и их представлениях, чем я это сумел сделать, пытаясь сохранить размер книги в разумных пределах. Особенно легко это осуществить с аспирантами, имеющими надлежащую подготовку по линейной алгебре со своих студенческих лет. К счастью, теперь имеется несколько учебников, посвященных алгебрам Ли и группам Ли, так что я не чувствую себя слишком виноватым, опустив эти темы (см., в частности, записки Серра „Алгебры Ли и группы Ли“).

Что касается предварительных сведений, то я предполагаю только, что читатель знаком с основными математическими понятиями (т. е. по существу с множествами и отображениями), а также с целыми и рациональными числами. Более подробное описание того, что предполагается известным, приведено ниже. В нескольких случаях определители используются раньше их формального изложения в тексте. Большинству читателей определители уже будут известны, и мы полагаем, что для улучшения структуры всей книги можно позволить себе такие небольшие отклонения от полного упорядочения логических связей.

Нью-Йорк, 1965

Серж Ленг