Предварительные сведения

Мы предполагаем, что читатель знаком с понятием множества и символами $\cap$, $\cup$, $\supset$, $\subset$, $\in$. Если A, B — множества, то запись $A \subset B$ обозначает, что A содержится в B, но может и совпадать с B. То же самое относится к записи $A \supset B$.

Если $f\colon A \to B$ — отображение одного множества в другое, то мы пишем

$$x \longmapsto f(x)$$

для обозначения действия f на элемент x из A. Мы различаем стрелки $\to$ и $\longmapsto$.

Пусть $f\colon A \to B$ — некоторое отображение. Мы говорим, что f *инъективно*, если из $x \neq y$ следует $f(x) \neq f(y)$. Мы говорим, что f *сюръективно*, если для каждого $b \in B$ существует элемент $a \in A$, такой, что $f(a) = b$. Мы говорим, что f *биективно*, если оно одновременно сюръективно и инъективно [1]).

Подмножество A множества B называется *собственным*, если $A \neq B$.

Пусть $f\colon A \to B$ — отображение и A' — подмножество в A.

Ограничение f на A' есть отображение A' в B, обозначаемое символом $f \mid A'$.

Если $f\colon A \to B$ и $g\colon B \to C$ — отображения, то их *композиция* $g \circ f$ определяется соотношением $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ для всех $x \in A$.

Пусть $f\colon A \to B$ — отображение и B' — подмножество в B. Через $f^{-1}(B')$ мы обозначаем подмножество в A, состоящее из всех тех $x \in A$, для которых $f(x) \in B'$. Мы называем его *прообразом* множества B'. Соответственно $f(A)$ мы называем *образом* отображения f.

Диаграмма

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "h"'] & & B \arrow[dl, "g"] \\ & C & \end{tikzcd}$$

---

[1]) В применении к отображениям множеств с заданной системой алгебраических операций в русской литературе наряду с терминами „инъективно", „сюръективно" и „биективно" употребительны также соответственно термины „мономорфно", „эпиморфно" и „изоморфно". — *Прим. ред.*

называется *коммутативной*, если $g \circ f = h$. Аналогично диаграмма

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi"'] & B \arrow[d, "g"] \\ C \arrow[r, "\psi"'] & D \end{tikzcd}$$

называется коммутативной, если $g \circ f = \psi \circ \varphi$. Мы будем иногда иметь дело с более сложными диаграммами, состоящими из стрелок между различными объектами. Такие диаграммы называются *коммутативными*, если в любом случае, когда можно пройти от одного объекта к другому по двум различным последовательностям стрелок, скажем

$$A_1 \xrightarrow{f_1} A_2 \xrightarrow{f_2} \ldots \xrightarrow{f_{n-1}} A_n$$

и

$$A_1 \xrightarrow{g_1} B_2 \xrightarrow{g_2} \ldots \xrightarrow{g_{m-1}} B_m = A_n,$$

соответствующие композиции совпадают:

$$f_{n-1} \circ f_{n-2} \circ \ldots \circ f_1 = g_{m-1} \circ g_{m-2} \circ \ldots \circ g_1.$$

Большинство наших диаграмм будет состоять из указанных выше треугольников или квадратов, и для проверки коммутативности таких диаграмм достаточно убедиться, что каждый треугольник и квадрат в них коммутативен.

Мы предполагаем, что читатель знаком с целыми и рациональными числами, множества которых обозначаются соответственно через $\mathbf{Z}$ и $\mathbf{Q}$. Во многих примерах мы предполагаем также, что читателю известны вещественные и комплексные числа, множества которых обозначаются через $\mathbf{R}$ и $\mathbf{C}$.

Пусть A и I — два множества. Под *семейством* элементов в A, занумерованных посредством I, понимают отображение $f\colon I \to A$. Таким образом, для каждого $i \in I$ задан элемент $f(i) \in A$. Хотя семейство есть не что иное как отображение, мы часто мыслим его как совокупность объектов из A и записываем его так:

$$\{f(i)\}_{i \in I}$$

или

$$\{a_i\}_{i \in I},$$

употребляя символ a_i вместо $f(i)$. Мы называем I *множеством индексов*.

Мы предполагаем, что читатель знает, что такое отношение эквивалентности. Пусть A — множество с заданным на нем отношением эквивалентности, E — некоторый класс эквивалентности элементов из A. Иногда мы будем определять отображение классов эквивалент-

ности в некоторое множество B. Чтобы определить такое отображение на классе E, мы будем зачастую сначала задавать его значение на некотором элементе $x \in E$ (называемом представителем класса E), а затем показывать, что оно не зависит от выбора представителя $x \in E$. В таком случае говорят, что f *правильно определено*.

Нам будут встречаться произведения множеств, скажем конечные произведения $A \times B$ или $A_1 \times \ldots \times A_n$, и произведения семейств множеств.

Мы будем пользоваться леммой Цорна, которую мы сейчас сформулируем.

Множество A называется (*частично*) *упорядоченным*, если между некоторыми парами элементов задано отношение $x \leqslant y$, удовлетворяющее следующим условиям. Для всех $x, y, z \in A$

имеем $x \leqslant x$;
если $x \leqslant y$ и $y \leqslant z$, то $x \leqslant z$;
если $x \leqslant y$ и $y \leqslant x$, то $x = y$.

Подмножество T в A называется *совершенно* (или *линейно*) упорядоченным, если для всякой пары элементов $x, y \in T$ будет $y \leqslant x$ или $x \leqslant y$.

Пусть S — подмножество в A. Любой элемент $b \in A$, удовлетворяющий условию $x \leqslant b$ для всех $x \in S$, будем называть верхней гранью подмножества S в множестве A.

Упорядоченное множество A называется *индуктивно упорядоченным*, если всякое его совершенно упорядоченное подмножество имеет верхнюю грань в A.

Элемент $a \in A$, для которого из $x \in A$ и $a \leqslant x$ следует $a = x$, называется *максимальным* элементом множества A. (Таким образом, максимальный означает „относительно максимальный", а не „абсолютно максимальный".)

Лемма Цорна утверждает: *если A — упорядоченное множество и если оно индуктивно упорядочено и не пусто, то в A существует по крайней мере один максимальный элемент.*

Мы будем также использовать утверждения о мощностях, наподобие следующих.

Пусть A — бесконечное множество. Тогда множество всех конечных подмножеств в A имеет ту же мощность, что и A. Если D счетно, то $A \times D$ имеет ту же мощность, что и A. Мощность мы будем иногда сокращенно обозначать символом card. Имеем

$$(\operatorname{card}(A) \leqslant \operatorname{card}(B) \quad \text{и} \quad \operatorname{card}(B) \leqslant \operatorname{card}(A)) \text{ влечет}$$
$$\operatorname{card}(A) = \operatorname{card}(B).$$