

Соответственно, интегрируя (17.15), находим

$$s = \ln(T^{c_p} p^{-R}) + \text{const},$$

или, после соответствующих преобразований,

$$s = c_p \ln \left(T p^{-\frac{\kappa-1}{\kappa}} \right) + \text{const}. \quad (17.18)$$

Можно получить еще одно выражение для энтропии идеального газа через параметры p и v . Привлечем (16.16), определим из него температуру через давление и объем и подставим в (17.17.) Получим

$$s = c_v \ln(pv^\kappa) + \text{const}. \quad (17.19)$$

§ 18. Связь между изотермической и адиабатической сжимаемостями. Уравнение адиабаты

Адиабатическим процессом называется процесс, протекающий без теплообмена между системой и внешними телами. Аналитическое условие адиабатического процесса

$$dQ = 0.$$

Так как $dQ = TdS$; а $T > 0$ всегда, то энтропия системы, совершающей адиабатический процесс, остается постоянной

$$dS = 0, \quad S = \text{const}. \quad (18.1)$$

Напомним, что уравнение $dQ = TdS$ справедливо только при квазистатических процессах. Поэтому условие (18.1) строго выполняется при квазистатических процессах. Следовательно, квазистатический адиабатический процесс одновременно является изоэнтропийным.

Уравнение адиабаты — аналитическую связь между термодинамическими параметрами системы, совершающей квазистатический процесс без теплообмена с окружающей средой, — можно получить путем соответствующей математической обработки формул для вычисления энтропии. Привлекаем (17.7) и (17.11):

$$ds = c_v \frac{dT}{T} + \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_v dv \quad (17.7)$$

и

$$ds = c_p \frac{dT}{T} - \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p dp. \quad (17.11)$$

В условиях адиабатического процесса $ds = 0$, поэтому выражения (17.7) и (17.11) примут вид

$$c_v \frac{dT}{T} + \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v dv = 0, \quad (18.2)$$

$$c_p \frac{dT}{T} - \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p dp = 0. \quad (18.3)$$

Разрешим (18.2) и (18.3) относительно $\frac{dT}{T}$ и приравняем полученные выражения.

Тогда

$$\frac{1}{c_v} \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v dv = -\frac{1}{c_p} \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p dp. \quad (18.4)$$

Так как уравнение (18.4) имеет место только при $ds = 0$, то из него можно выделить производную $\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_s$. Получим

$$\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_s = -\frac{c_v}{c_p} \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_v. \quad (18.5)$$

Для обработки правой части (18.5) привлекаем уравнение состояния термомеханической системы (7.3)

$$F(p, v, T) = 0.$$

Разрешив его относительно любого из параметров, например p , получим $p = p(v, T)$. Образует полный дифференциал p :

$$dp = \left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_T dv + \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v dT. \quad (18.6)$$

Частные производные, стоящие в правой части (18.6), образованы: первая при $T = \text{const}$, вторая при $v = \text{const}$. Закрепим, далее, p ($p = \text{const}$; $dp = 0$). Тогда (18.6) примет вид

$$\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_T dv + \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v dT = 0. \quad (18.7)$$

Выделим производную $\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p$ из (18.7). Будем иметь

$$\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p = -\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v \left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_T,$$

или

$$\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_v \left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_T = -1. \quad (18.8)$$

Выделим из (18.8) произведение двух производных, стоящих в правой части (18.5). Имеем

$$\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_v = -\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_T. \quad (18.9)$$

Подставляем (18.9) в (18.5) и получаем

$$\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_s = \frac{c_v}{c_p} \left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_T. \quad (18.10)$$

В (18.10) связаны две физические величины, характеризующие различные свойства системы, а именно:

$\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_s$ характеризует сжимаемость системы при адиабатическом, а $\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_T$ — при изотермическом процессе.

Легко убедиться, что $c_p > c_v$. Действительно, согласно (16.11), $c_p - c_v = T \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p$. Но для всех тел $\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p > 0$ (т. е. обе производные имеют один и тот же знак). Это прямо следует из сопоставления (18.9) и (7.10). Таким образом, $c_p - c_v > 0$ (это различие особенно заметно в случае газов). Отсюда следует, что для любого вещества

$$\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_s < \left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_T,$$

т. е. изотермическая сжимаемость больше, чем адиабатическая сжимаемость. Следовательно, при одном и том же изменении давления системы в различных условиях (изотермических, адиабатических) обнаруживается различное изменение объема системы. Менее податливой к сжатию является адиабатически изолированная система. Эту особенность довольно легко объяснить с точки зрения молекулярно-кинетических представлений.

При изотермическом сжатии системы температура ее остается постоянной, следовательно, средняя интенсивность молекулярного движения не изменяется, сжатие системы происходит при неизменных в этом смысле условиях. Адиабатическое сжатие сопровождается повышением температуры. Это вызывает увеличение интенсивности движения молекул и рост давления в системе.

Таким образом, при адиабатическом сжатии противодействие возрастет по сравнению с изотермическим. Система будет обладать пониженной сжимаемостью.

Уравнение (18.10), с другой стороны, является уравнением адиабаты в общем виде. Получим из (18.10) уравнение адиабаты для идеального газа. Для идеального газа (16.17)

$$\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_T = -\frac{v}{p}.$$

Подставив (16.17) в (18.10), получим

$$\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_s = -\frac{c_v}{c_p} \frac{v}{p}. \quad (18.11)$$

Учитывая, что $\frac{c_p}{c_v} = \kappa$, и подставив это значение в (18.11), получаем

$$\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_s = -\frac{1}{\kappa} \frac{v}{p}. \quad (18.12)$$

Таким образом, при $s = \text{const}$ (отсутствие теплообмена)

$$\frac{dv}{dp} = -\frac{1}{\kappa} \frac{v}{p},$$

или

$$\kappa \frac{dv}{v} = -\frac{dp}{p}. \quad (18.13)$$

Интегрируем (18.13) в предположении $\kappa = \text{const}$ и получаем

$$pv^\kappa = \text{const}. \quad (18.14)$$

Уравнение (18.14) носит название уравнения Пуассона и является уравнением адиабаты для идеального газа. Уравнение (18.14) можно получить непосредственно из (17.19). Действительно, при $s = \text{const}$ следует $pv^\kappa = \text{const}$.

Две другие формы уравнения Пуассона могут быть получены аналогичным путем из (17.17) и (17.18).

$$T v^{\kappa-1} = \text{const} \quad (18.15)$$

и

$$T p^{-\frac{\kappa-1}{\kappa}} = \text{const}. \quad (18.16)$$