ЧАСТЬ I

ГЛАВА I
КОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ

§ I.1. ПЕРИОДИЧЕСКИЕ И ГАРМОНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

Колебательные процессы охватывают обширный круг явлений, для которых характерно повторение их характеристик через определенные промежутки времени. Всякое колебание связано с нарушением равновесного состояния среды и проявляется в отклонении ее параметров от равновесных значений (например, при мгновенном сжатии столба газа в трубе — давление газа, температура, плотность, смещение частиц).

Если колебания могут быть выражены в виде функции, значения которой через равные интервалы времени повторяются, то такие колебания называют *периодическими*. Наименьший интервал времени повторения процесса называют *периодом*. Общее математическое выражение периодического процесса задают функцией $f(t)$, имеющей свойство повторять свое значение через интервалы времени, равные периоду T. Это свойство выражают в форме соотношения

$$f(t)=f(t+T). \tag{I.1.1}$$

В общем случае периодичность может существовать как во времени, так и в других независимых переменных. Например, рельеф местности с буграми одинаковой формы, отстоящими на одинаковом расстоянии, также описывается периодической функцией типа (I.1.1), только вместо независимой переменной t появляется координата r. Роль периода в этом случае будет играть наименьшее расстояние λ, соответствующее повторению значений функции. В этом случае периодичность структуры профиля не зависит от времени.

Могут быть периодические процессы, которые описываются одновременно временной и пространственной координатами:

$$f(t,\ r)=f(t+T,\ r+\lambda). \tag{I.1.2}$$

Наиболее простой периодической функцией является круговая:

$$U=U_0\cos(\omega t-\alpha). \tag{I.1.3}$$

Ее период равен $T=2\pi/\omega$, в чем можно убедиться непосредственно, подставив в (I.1.3) $t+2\pi/\omega$ вместо t (U_0 — амплитуда колебаний; $\omega=2\pi/T$ — круговая частота; $\omega t-\alpha$ — текущая фаза; α — фаза колебаний в момент времени $t=0$, или начальная фаза).

Если периодическая функция с периодом T в интервале t, $t+T$ имеет конечное число максимумов и минимумов, а в точках разрывов удовлетворяет условию Дирихле

$$f(t)=\frac{f(t-0)+f(t+0)}{2},$$

то она может быть представлена в виде ряда Фурье

$$f(t)=\frac{A_0}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}\left(B_m\cos\frac{2m\pi t}{T}+\right.$$
$$\left.+C_m\sin\frac{2m\pi t}{T}\right), \qquad (I.1.4)$$

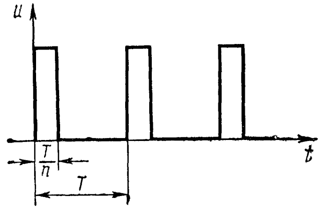

Рис. I.1.1

где A_0, B_m, C_m — коэффициенты ряда, которые вычисляют по формулам:

$$A_0=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\,dt; \quad B_m=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos\frac{2m\pi t}{T}\,dt;$$

$$C_m=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin\frac{2m\pi t}{T}\,dt. \qquad (I.1.5)$$

Ряд Фурье (I.1.4) часто записывают в форме

$$f(t)=\frac{A_0}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}A_m\cos\left(\frac{2m\pi t}{T}-\alpha_m\right), \qquad (I.1.6)$$

где $A_m=\sqrt{B_m^2+C_m^2}$ $\operatorname{tg}\alpha_m=C_m/B_m$; A_0, B_m, C_m вычисляют по формулам (I.1.5).

В качестве примера проведем разложение в ряд Фурье прямоугольного импульса (рис. I.1.1) с периодом T и длительностью импульса T/n ($n>1$). Пусть импульс задан функцией

$$f(t)=\begin{cases} h & \text{при} \quad lT\leqslant t\leqslant lT+\frac{T}{n}, \\ 0 & \text{при} \quad lT+\frac{T}{n}<t<(l+1)T, \end{cases}$$

где $l=0, 1, 2, \ldots$

Вычислив A_0, B_m и C_m по формулам (I.1.5), получим:

$$A_0=\frac{2h}{n}; \quad B_m=\frac{h}{m\pi}\sin\frac{2m\pi}{n}; \quad C_m=\frac{h}{m\pi}\left(1-\cos\frac{2m\pi}{n}\right).$$

Отсюда следуют формулы для определения амплитуд и фаз отдельных гармонических составляющих прямоугольного импульса:

$$A_m=\frac{2h}{m\pi}\sin\frac{m\pi}{n}, \quad \alpha_m=\frac{m\pi}{n}.$$

Тогда для данной периодической функции ряд Фурье имеет вид

$$f(t) = \frac{h}{n} + \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{2h}{m\pi} \sin \frac{m\pi}{n} \cos \left(\frac{2m\pi t}{T} + \frac{m\pi}{n} \right) \right].$$

На рис. I.1.2, *а* даны графики импульса в координатах u и t для различных значений n, а на рис. I.1.2, *б* — спектры этой функции для тех же значений n.

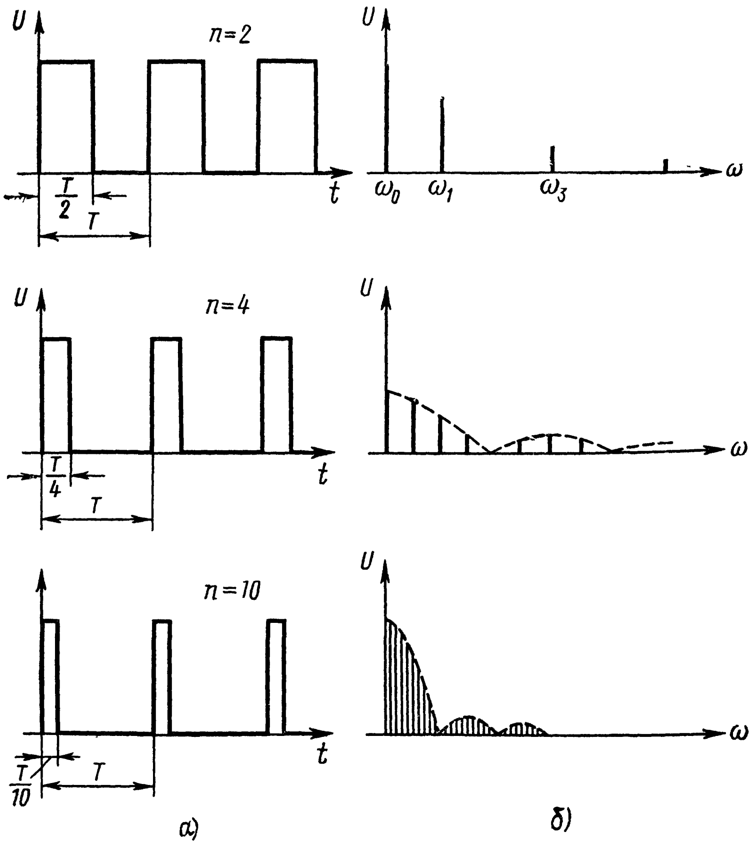

Рис. I.1.2

Этот пример показывает, что с увеличением n (с уменьшением частоты повторения прямоугольного импульса) увеличивается число спектральных компонент, с помощью которых может быть представлена функция. В пределе, когда $n \to \infty$, линейчатый спектр обратится в сплошной.

Другим примером гармонического анализа периодической функции является разложение в ряд Фурье периодической последовательности затухающих колебаний. Опуская аналитическое решение, приведем основные результаты решения задачи. На рис. I.1.3, *а* изображены графики затухающих колебаний для разных периодов повторения, а на рис. I.1.3, *б* — спектральные составляющие соответствующих колебаний, вычисленные по формулам (I.1.5) и (I.1.6).

С уменьшением частоты повторения отдельных колебаний число спектральных линий, необходимых для спектрального представления процесса, постоянно возрастает. Необходимо иметь все большее и большее число отдельных гармонических составляющих, чтобы взаимным уничтожением их амплитуд при сложении изобразить провалы между затухающими колебаниями. Надо заметить, что все линейные спектры, соответствующие различным частотам периодической функции, при надлежащем подборе масштаба ординат имеют одну и ту же огибающую (рис. I.1.3, *б*; пунктир).

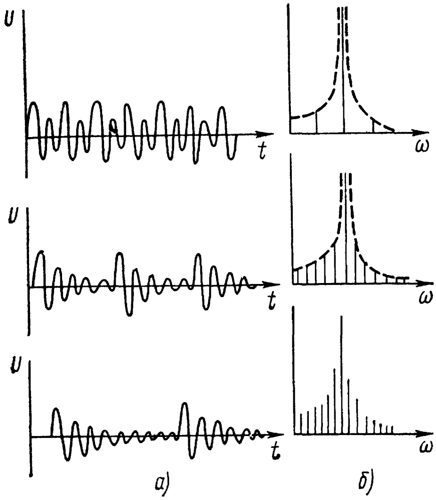

Рис. I.1.3

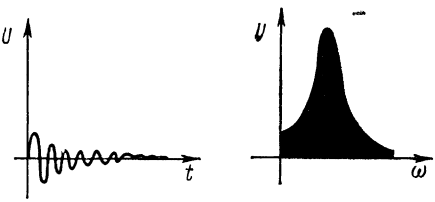

Рис. I.1.4

Отдельное затухающее колебание не является периодическим процессом. Оно соответствует предельному случаю, когда частота повторения рассмотренной периодической функции стремится к нулю. В этом случае можно осуществить предельный переход от ряда Фурье к интегралу Фурье. Если воспользоваться разложением в интеграл Фурье одиночного затухающего процесса, то получим в итоге представление этого непериодического колебания в виде непрерывного спектра (рис. I.1.4).

§ I.2. КОЛЕБАТЕЛЬНАЯ СИСТЕМА БЕЗ ТРЕНИЯ

Рассмотрим движение простейшей колебательной механической системы, состоящей из массы m, которая может перемещаться горизонтально вдоль направляющего стержня под действием двух пружин (рис. I.2.1). Предположим, что деформация пружин подчиняется закону Гука:

$$F = -\frac{1}{c}\xi, \qquad (I.2.1)$$

где c — гибкость пружин; ξ — смещение от положения равновесия. Трением и сопротивлением воздуха пренебрегаем. В реальных си-