

основные результаты решения задачи. На рис. 1.1.3, а изображены графики затухающих колебаний для разных периодов повторения, а на рис. 1.1.3, б — спектральные составляющие соответствующих колебаний, вычисленные по формулам (1.1.5) и (1.1.6).

С уменьшением частоты повторения отдельных колебаний число спектральных линий, необходимых для спектрального представления процесса, постоянно возрастает. Необходимо иметь все большее и большее число отдельных гармонических составляющих, чтобы вза-

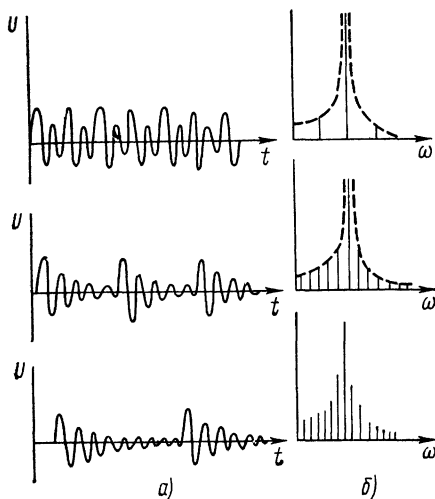


Рис. 1.1.3

имным уничтожением их амплитуд при сложении изобразить провалы между затухающими колебаниями. Надо заметить, что все линейные спектры, соответствующие различным частотам периодической функции, при надлежащем подборе масштаба ординат имеют одну и ту же огибающую (рис. 1.1.3, б; пунктир).

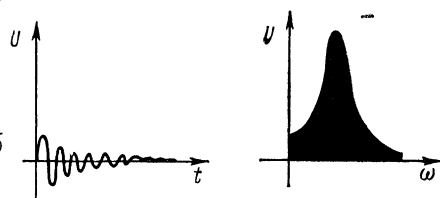


Рис. 1.1.4

Отдельное затухающее колебание не является периодическим процессом. Оно соответствует предельному случаю, когда частота повторения рассмотренной периодической функции стремится к нулю. В этом случае можно осуществить предельный переход от ряда Фурье к интегралу Фурье. Если воспользоваться разложением в интеграл Фурье одиночного затухающего процесса, то получим в итоге представление этого непериодического колебания в виде непрерывного спектра (рис. 1.1.4).

§ 1.2. КОЛЕБАТЕЛЬНАЯ СИСТЕМА БЕЗ ТРЕНИЯ

Рассмотрим движение простейшей колебательной механической системы, состоящей из массы m , которая может перемещаться горизонтально вдоль направляющего стержня под действием двух пружин (рис. 1.2.1). Предположим, что деформация пружин подчиняется закону Гука:

$$F = -\frac{1}{c} \xi, \quad (1.2.1)$$

где c — гибкость пружин; ξ — смещение от положения равновесия. Трением и сопротивлением воздуха пренебрегаем. В реальных си-

стемах закон Гука выполняется при малых деформациях; что же касается сил трения и сил сопротивления воздуха, то во многих случаях они достаточно малы.

Допустим, что тело в начальный момент времени $t=0$ имеет смещение от положения равновесия ξ_0 и скорость $\dot{\xi}_0$. В последующие моменты времени смещение будет описываться некоторой функцией времени ξ , которую надо найти.

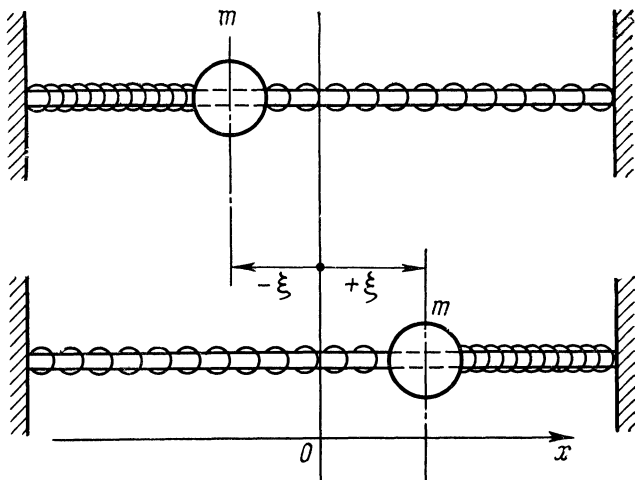


Рис. 1.2.1

Под действием силы упругости пружин возникает ускорение, которое согласно второму закону Ньютона равно $d^2\xi/dt^2 = F/m$. Учитывая выражение (1.2.1), получим дифференциальное уравнение движения

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = -\frac{1}{mc}\xi. \quad (1.2.2)$$

Анализ уравнения показывает, что тело массой m под действием сил упругости получает ускорение, значение которого пропорционально отклонению тела от положения равновесия, а направление противоположно смещению. Заметим, что масса m и гибкость c больше нуля. Поэтому коэффициент $\frac{1}{mc} > 0$ и его можно записать в виде квадрата некоторого действительного числа:

$$\frac{1}{mc} = \omega_0^2, \quad (1.2.3)$$

где ω_0 не зависит от смещения ξ и времени t и определяется только параметрами системы, массой m и гибкостью c .

Используя коэффициент ω_0^2 , запишем уравнение (1.2.2) в виде

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} + \omega_0^2\xi = 0. \quad (1.2.4)$$

Это выражение является однородным линейным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянным коэффициентом. К подобным уравнениям приводят многие задачи из различных областей физики.

При этом часто для их вывода используют закон сохранения энергии. Поясним это на примере движения стенок упругого тонкого кольца. Пусть в начальный момент времени упругое кольцо с радиусом a , толщиной d и высотой h равномерно растянуто и имеет радиус $a + \xi_0$, а затем освобождено. Под действием сил упругости стенки кольца придут в движение, во время которого сумма кинетической и потенциальной энергии, если пренебречь потерями, остается постоянной. В момент времени t кинетическая энергия равна $2\pi a h d \rho \xi^2 / 2$, а потенциальная — произведению плотности энергии растяжения $E \varepsilon^2 / 2$ на объем кольца $2\pi a h d$. Здесь ρ — плотность; E — модуль Юнга; ε — относительное удлинение периметра кольца, равное $[2\pi(a + \xi) - 2\pi a] / 2\pi a = \xi / a$; ξ — мгновенное увеличение радиуса кольца.

Сумма энергий в момент времени t равна $\pi a h d (\rho \xi^2 + E \xi^2 / a^2)$, а приращение полной энергии за время dt $2\pi a h d (\rho \xi \dot{\xi} + E \xi \dot{\xi} / a) dt = 0$.

После сокращения на множитель $2\pi a h d \dot{\xi} dt$ получим дифференциальное уравнение радиального движения стенок кольца. Оно имеет вид (1.2.4), только $\omega_0^2 = \frac{E}{(a^2 \rho)}$.

Рассмотрим процессы, протекающие в простейшем колебательном контуре с емкостью C * и коэффициентом самоиндукции L . При этом введем следующие ограничения для данной электрической системы. Будем считать, что L не зависит от силы тока, электрическая емкость C не зависит от заряда q , а сопротивления соединительных проводов так малы, что их можно не учитывать.

Указанные ограничения в реальном колебательном контуре выполняются приближенно. Первые два характеризуют линейность процессов в колебательной системе. Они выполняются тем лучше, чем меньше сила тока. Что касается предположения о малости сопротивления, то примем его как первое приближение к реальной электрической системе.

С помощью переключателя (рис. 1.2.2) зарядим конденсатор C и замкнем цепь, содержащую катушку с индуктивностью L . Под влиянием разности потенциалов на обкладках конденсатора в контуре будет существовать ток, изменяющийся со временем. Применяя к контуру закон Кирхгофа, получим

$$U = -L \frac{dI}{dt}, \quad (1.2.5)$$

где $U = C^{-1}q$ — напряжение на конденсаторе; $-L \frac{dI}{dt}$ — электродвижущая сила самоиндукции контура; $I = + \frac{dq}{dt}$.

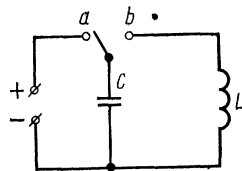


Рис. 1.2.2

* В пособии некоторые электрические и механические величины обозначены одинаковыми буквами. В связи с этим условимся большими буквами обозначать электрические величины, малыми — механические.

Тогда после простых преобразований получим дифференциальное уравнение вида

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{LC}q = 0. \quad (1.2.6)$$

Известно, что коэффициент самоиндукции L и электрическая емкость C не могут быть отрицательными, поэтому коэффициент $1/(LC)$ в уравнении (1.2.6) больше нуля. В связи с этим обозначим его заведомо положительным числом $\omega_0^2 = 1/(LC)$ и запишем уравнение (1.2.6) в виде

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \omega_0^2q = 0. \quad (1.2.7)$$

При этом оно формально совпадает с (1.2.4) для механических колебаний. Что касается существа процессов, то эти два уравнения описывают законы совершенно различных явлений. Механическое уравнение дает законы смещения тела, на которое действует сила упругости. Уравнение колебательного контура выражает закон изменения электрического заряда конденсатора, когда его обкладки замкнуты на катушку самоиндукции.

Остановимся на решении (1.2.4) и (1.2.7), обозначив искомую функцию U . В (1.2.4) эта функция выражает смещение $\xi(t)$, а в (1.2.7) — электрический заряд $q(t)$.

Итак,

$$\frac{d^2U}{dt^2} + \omega_0^2U = 0. \quad (1.2.8)$$

Напомним, что для получения решения дифференциальных уравнений необходимо иметь начальные условия. В частности, для решения уравнения второго порядка необходимо знать в начальный момент времени значения искомой функции и первой производной от этой функции по времени.

Допустим, что начальные условия известны и имеют вид

$$U_{t=0} = U_0, \quad \frac{dU}{dt}_{t=0} = \dot{U}_0. \quad (1.2.9)$$

Решение (1.2.8) ищем в виде

$$U = ae^{D_1t} + be^{D_2t},$$

где D_1 и D_2 — корни характеристического уравнения

$$D^2 + \omega_0^2 = 0. \quad (1.2.10)$$

Решение (1.2.10) дает два корня: $D_1 = j\omega_0$, $D_2 = -j\omega_0$ ($j = \sqrt{-1}$). Таким образом, решение (1.2.8) имеет вид

$$U = ae^{j\omega_0t} + be^{-j\omega_0t}. \quad (1.2.11)$$

Используя (1.2.9), получим систему для определения постоянных интегрирования a и b :

$$U_0 = a + b, \quad \dot{U}_0 = j\omega_0(a - b).$$

Решая эту систему, найдем:

$$a = \frac{U_0 - j\dot{U}_0/\omega_0}{2}, \quad b = \frac{U_0 + j\dot{U}_0/\omega_0}{2}. \quad (I.2.12)$$

После подстановки постоянных интегрирования из (I.2.12) в (I.2.11) получим

$$U = U_0 \left(\frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2} \right) + \frac{\dot{U}_0}{\omega_0} \left(\frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2j} \right).$$

По формулам Эйлера, выражения, стоящие в скобках, представляют собой круговые функции $\cos \omega_0 t$ и $\sin \omega_0 t$. Таким образом, решение уравнения второго порядка, удовлетворяющее начальным условиям (I.2.9), имеет вид

$$U = U_0 \cos \omega_0 t + \frac{\dot{U}_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t. \quad (I.2.13)$$

Заменим U_0 и \dot{U}_0/ω_0 тригонометрическими функциями:

$$U_0 = A_0 \cos \alpha, \quad \dot{U}_0/\omega_0 = A_0 \sin \alpha.$$

Решение (I.2.13) примет вид

$$U = A_0 \cos(\omega_0 t - \alpha), \quad (I.2.14)$$

где

$$A_0 = \sqrt{U_0^2 + \dot{U}_0^2/\omega_0^2}, \quad (I.2.15)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\dot{U}_0}{U_0 \omega_0}. \quad (I.2.16)$$

При движении тела под действием упругости пружины смещение ξ подчиняется гармоническому закону. Параметры системы (m , c) вместе с начальными значениями смещения и скорости определяют полностью колебательный процесс. Характеристики колебательного процесса можно вычислить по формулам:

$$U_0 = \xi_0 \text{ (амплитуда);}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{mc}} \text{ (круговая частота);} \quad (I.2.17)$$

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{\dot{\xi}_0 \sqrt{mc}}{\xi_0} \text{ (начальная фаза).}$$

Точно так же определена полная характеристика колебаний заряда q в случае простого колебательного контура:

$$q_0, \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}, \quad \alpha = \operatorname{arctg} \frac{\dot{q}_0 \sqrt{LC}}{q_0}. \quad (I.2.18)$$

Рассмотрим энергетические соотношения для гармонического процесса. Их легко получить, если записать уравнение (I.2.1) в виде

$$m \frac{d^2 \xi}{dt^2} + \frac{1}{c} \xi = 0, \quad (I.2.19)$$

где первое слагаемое — сила инерции, второе — сила упругости.

Уравнение (I.2.19) выражает принцип равновесия сил. Работа суммы указанных сил на пути $d\xi$ равна нулю и выражается формулой

$$m \frac{d^2\xi}{dt^2} d\xi + \frac{1}{c} \xi d\xi = 0. \quad (\text{I.2.20})$$

Преобразуем первое слагаемое так, чтобы выделить приращение скорости $d\dot{\xi}$. Эти преобразования просты и сводятся к следующей операции:

$$\begin{aligned} m \frac{d^2\xi}{dt^2} d\xi &= m \frac{d}{dt} \left(\frac{d\xi}{dt} \right) d\xi = \\ &= m \frac{d\xi}{dt} d \left(\frac{d\xi}{dt} \right) = m \dot{\xi} d\dot{\xi}. \end{aligned} \quad (\text{I.2.21})$$

С учетом (I.2.21) запишем уравнение энергии (I.2.20) в виде

$$m \dot{\xi} d\dot{\xi} + \frac{1}{c} \xi d\xi = 0,$$

или

$$d \left(\frac{m \dot{\xi}^2}{2} + \frac{\xi^2}{2c} \right) = 0. \quad (\text{I.2.22})$$

Здесь первое слагаемое в скобках представляет собой кинетическую энергию, а второе — потенциальную.

Уравнение (I.2.22) показывает, что при гармоническом колебании изменение суммы потенциальной и кинетической энергий равно нулю в любой момент времени. Интегрируя его, получаем

$$\frac{m \dot{\xi}^2}{2} + \frac{\xi^2}{2c} = \text{const.}$$

Используя выражения для смещения и скорости при гармоническом колебании

$$\xi = \xi_0 \cos(\omega_0 t + \alpha), \quad \dot{\xi} = -\xi_0 \omega_0 \sin(\omega_0 t + \alpha),$$

найдем выражения для кинетической и потенциальной энергий колебательной системы без трения:

$$\frac{m \dot{\xi}^2}{2} = \frac{\xi_0^2}{2c} \sin^2(\omega_0 t + \alpha) = \frac{\xi_0^2}{4c} - \frac{\xi_0^2}{4c} \cos 2(\omega_0 t + \alpha),$$

$$\frac{\xi^2}{2c} = \frac{\xi_0^2}{2c} \cos^2(\omega_0 t + \alpha) = \frac{\xi_0^2}{4c} + \frac{\xi_0^2}{4c} \cos 2(\omega_0 t + \alpha),$$

$$\frac{m \dot{\xi}^2}{2} + \frac{\xi^2}{2c} = \frac{\xi_0^2}{2c}.$$

Как кинетическая, так и потенциальная энергия изменяются с частотой, равной $2\omega_0$, около среднего значения $\xi_0^2/(4c)$. Сдвиг фаз

между колебаниями кинетической и потенциальной энергий равен π (рис. 1.2.3).

Аналогично, для колебательного контура

$$\frac{L\dot{q}^2}{2} + \frac{q^2}{2C} = \text{const},$$

где первое слагаемое выражает энергию магнитного поля катушки самоиндукции, а второе — энергию электрического поля конденсатора.

Как видно, в изолированных системах полная энергия с течением времени не изменяется.

§ 1.3. МЕХАНИЧЕСКАЯ КОЛЕБАТЕЛЬНАЯ СИСТЕМА С ПОТЕРЯМИ

В энергетическом отношении реальные системы характеризуются изменением энергии вследствие частичной затраты ее на работу против непотенциальных сил трения и излучения в окружающее пространство. В динамических уравнениях потери энергии обычно учитывают введением сил вязкого трения, а в электрическом контуре — введением падения напряжения на активном сопротивлении.

При выводе уравнения движения учтем, что кроме сил упругости в реальных системах действуют силы трения, которые в первом приближении пропорциональны скорости:

$$F_{\text{тр}} = -r\dot{\xi}, \quad (1.3.1)$$

где r — коэффициент вязкого трения.

Заметим, что при нелинейной зависимости силы трения от скорости колебания тела имеют более сложный характер. В случае линейной зависимости дифференциальное уравнение движения незначительно изменяется по сравнению с рассмотренным и имеет вид

$$m \frac{d^2\xi}{dt^2} + r \frac{d\xi}{dt} + \frac{1}{c} \xi = 0. \quad (1.3.2)$$

Аналогично, для колебательного контура с омическим сопротивлением

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q = 0. \quad (1.3.3)$$

Пользуясь методами решения линейных уравнений, получаем решение в виде

$$\begin{aligned} \xi &= Ae^{-\delta t} \cos(\omega t - \varphi) = e^{-\delta t} (B \cos \omega t + C \sin \omega t), \\ \dot{\xi} &= e^{-\delta t} [(C\omega - B\delta) \cos \omega t - (C\delta + B\omega \sin \omega t)]. \end{aligned} \quad (1.3.4)$$

Здесь $B = A \cos \varphi$, $C = A \sin \varphi$, $\delta = r/(2m)$,

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \omega_0 \sqrt{1 - (\delta/\omega_0)^2}, \quad (1.3.5)$$

где ω — собственная частота затухающих колебаний; δ — коэффициент затухания; ω_0 — круговая частота системы без потерь; $Ae^{-\delta t}$ — ампли-