между колебаниями кинетической и потенциальной энергий равен π (рис. I.2.3).

Аналогично, для колебательного контура

$$\frac{L\dot{q}^2}{2}+\frac{q^2}{2C}=\text{const},$$

где первое слагаемое выражает энергию магнитного поля катушки самоиндукции, а второе — энергию электрического поля конденсатора.

Как видно, в изолированных системах полная энергия с течением времени не изменяется.

§ I.3. МЕХАНИЧЕСКАЯ КОЛЕБАТЕЛЬНАЯ СИСТЕМА С ПОТЕРЯМИ

В энергетическом отношении реальные системы характеризуются изменением энергии вследствие частичной затраты ее на работу против непотенциальных сил трения и излучения в окружающее пространство. В динамических уравнениях потери энергии обычно учитывают введением сил вязкого трения, а в электрическом контуре — введением падения напряжения на активном сопротивлении.

При выводе уравнения движения учтем, что кроме сил упругости в реальных системах действуют силы трения, которые в первом приближении пропорциональны скорости:

$$F_{\text{тр}}=-r\dot{\xi}, \tag{I.3.1}$$

где r — коэффициент вязкого трения.

Заметим, что при нелинейной зависимости силы трения от скорости колебания тела имеют более сложный характер. В случае линейной зависимости дифференциальное уравнение движения незначительно изменяется по сравнению с рассмотренным и имеет вид

$$m\frac{d^2\xi}{dt^2}+r\frac{d\xi}{dt}+\frac{1}{c}\xi=0. \tag{I.3.2}$$

Аналогично, для колебательного контура с омическим сопротивлением

$$L\frac{d^2q}{dt^2}+R\frac{dq}{dt}+\frac{1}{C}q=0. \tag{I.3.3}$$

Пользуясь методами решения линейных уравнений, получаем решение в виде

$$\begin{gathered}\xi=Ae^{-\delta t}\cos(\omega t-\varphi)=e^{-\delta t}(B\cos\omega t+C\sin\omega t),\\ \dot{\xi}=e^{-\delta t}[(C\omega-B\delta)\cos\omega t-(C\delta+B\omega\sin\omega t)].\end{gathered} \tag{1.3.4}$$

Здесь $B=A\cos\varphi$, $C=A\sin\varphi$, $\delta=r/(2m)$,

$$\omega=\sqrt{\omega_0^2-\delta^2}=\omega_0\sqrt{1-(\delta/\omega_0)^2}, \tag{I.3.5}$$

где ω — собственная частота затухающих колебаний; δ — коэффициент затухания; ω_0 — круговая частота системы без потерь; $Ae^{-\delta t}$ — амплитуда, изменяющаяся со временем; A и φ или B и C — постоянные интегрирования, которые определяют из начальных условий: $\xi(t)\Big|_{t=0} = \xi_0$; $\dot{\xi}(t)\Big|_{t=0} = \dot{\xi}_0$. Применяя их к (I.3.4), получим:

$$B = \xi_0, \quad C = \frac{\dot{\xi}_0 + \delta\xi_0}{\omega},$$

$$A = \sqrt{B^2 + C^2} = \sqrt{\xi_0^2 + \left(\frac{\dot{\xi}_0 + \delta\xi_0}{\omega}\right)^2},$$

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{C}{B} = \operatorname{arctg}\frac{\dot{\xi}_0 + \delta\xi_0}{\omega\xi_0}. \qquad (I.3.6)$$

Графики затухающих колебаний представлены на рис. I.3.1. Здесь приведена зависимость смещения затухающих колебаний от времени в системах с различными коэффициентами затухания δ.

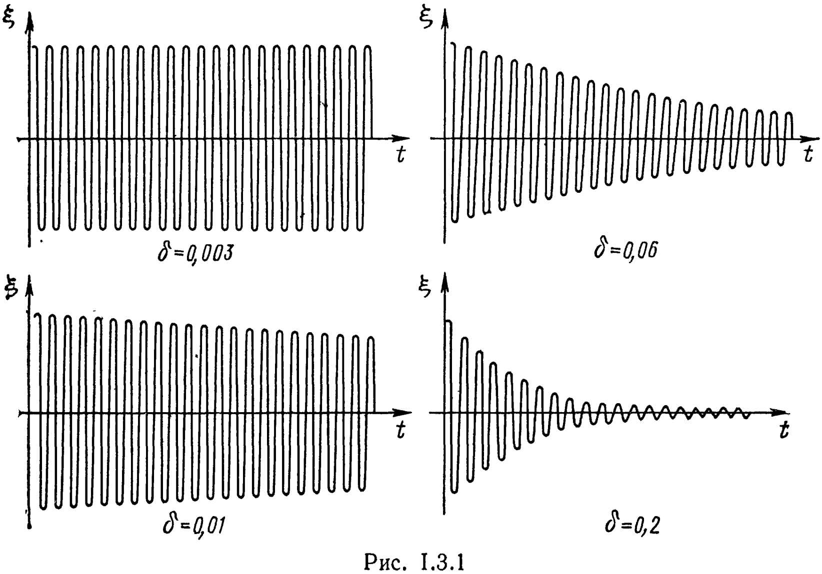

Рис. I.3.1

Формула (I.3.4) показывает, что затухающие колебания не являются гармоническими, так как их амплитуда убывает со временем, а частота ω зависит от коэффициента затухания. В частности, если $\delta^2 > \omega_0^2$, т. е. $(r/2m)^2 \geqslant 1/(mc)$, то колебания невозможны.

Для характеристики затухающих колебаний пользуются коэффициентом затухания δ, логарифмическим декрементом Θ и добротностью Q.

Коэффициент затухания, как это следует из уравнения (I.3.4), определяет быстроту убывания амплитуды с течением времени. Если обозначить время, в течение которого амплитуда уменьшается в $e = 2{,}718$ раза через τ, то

$$\delta = \frac{1}{\tau}.$$

Уменьшение амплитуды за один цикл характеризуется *логарифмическим декрементом*, равным натуральному логарифму отношения двух амплитуд, разделенных периодом:

$$\Theta = \ln \frac{A_0 e^{-\delta t}}{A_0 e^{-\delta(t+T)}} = \delta T = \frac{T}{\tau}. \qquad (I.3.7)$$

Таким образом, логарифмический декремент равен отношению периода колебаний ко времени затухания τ.

Добротность системы — это величина, равная числу полных колебаний, соответствующих уменьшению амплитуды в e^{π} раз.

Связь между названными характеристиками следует из простых соотношений. Если обозначить время убывания амплитуды в e^{π} раз через τ_1, то $\frac{e^{-\delta t}}{e^{-\delta(t+T)}} = e^{\delta\tau_1} = e^{\pi}$, т. е. $\delta\tau_1 = \pi$, откуда

$$\tau_1 = \pi/\delta = \tau\pi.$$

Число периодов, укладывающихся в промежуток времени τ_1, или добротность Q, выражается формулой

$$Q = \frac{\tau_1}{T} = \frac{\tau\pi}{T}.$$

Совершенно очевидно, что

$$Q = \frac{\tau_1}{T} = \frac{\pi}{\delta T} = \frac{\pi}{\delta 2\pi/\omega_0} = \frac{\omega_0}{2\delta} = \frac{2\pi f_0 m}{r} = \frac{\omega_0 m}{r}. \qquad (I.3.8)$$

Характеристики затухания τ, Θ и Q определяют через параметры колебательной системы с помощью следующих формул:

$$\tau = \frac{2m}{r}, \quad \Theta = \frac{\pi}{Q} = \frac{T}{r} = \frac{2\pi}{\omega_0\tau} = \frac{\pi r}{m}\sqrt{cm} = \pi r\sqrt{\frac{c}{m}}. \qquad (I.3.9)$$

Пользуясь понятием добротности механической системы, преобразуем формулу собственной частоты затухающих колебаний (I.3.5) к виду

$$\omega = \omega_0\sqrt{1-(1/2Q)^2}. \qquad (I.3.10)$$

Очевидно, что при добротности превышающей несколько десятков $\left(\frac{1}{2Q} \ll 1\right)$, частота затухающих колебаний может быть заменена собственной частотой ω_0 колебаний без потерь.

Обычно добротности акустических колебательных систем удовлетворяют условию (I.3.10), и их можно рассматривать как квазигармонические. Например, добротность кварцевой пластины, употребляемой в качестве излучателя ультразвуковых колебаний, равна 100 000, а камертона — 10 000.

Найдем энергетические соотношения в системе с потерями. Умножая (I.3.2) на $d\xi$ и проводя преобразования [см. (I.2.20) и (I.2.21)], получим

$$m\ddot{\xi}\, d\xi + r\dot{\xi}^2\, dt + \frac{1}{c}\,\xi\, d\xi = 0. \qquad (I.3.11)$$

Подставляя первое и третье слагаемые в форме дифференциалов кинетической и потенциальной энергий, найдем:

$$d\left(\frac{m\dot{\xi}^2}{2}+\frac{\xi^2}{2c}\right)=-r\dot{\xi}^2\,dt,$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m\dot{\xi}^2}{2}+\frac{\xi^2}{2c}\right)=-r\dot{\xi}^2. \qquad (I.3.12)$$

Это значит, что убыль энергии системы $\frac{d}{dt}\left(\frac{m\dot{\xi}^2}{2}+\frac{\xi^2}{2c}\right)$ равна той энергии, которую поглощает активное сопротивление в единицу времени. При этом надо иметь в виду, что активное сопротивление обусловлено трением, излучением акустических волн и другими потерями. Очевидно, что потери энергии за период могут быть оценены интегрированием (I.3.12) в пределах от t до $t+T$:

$$\int\limits_t^{t+T} r\dot{\xi}^2\,dt=r\dot{\xi}_0\int\limits_t^{t+T}\sin^2\omega t\,dt=\frac{r\dot{\xi}_0^2T}{2}. \qquad (I.3.13)$$

Если начальная скорость равна $\dot{\xi}_0$, а потенциальная энергия — нулю, то начальный запас колебательной энергии $m\dot{\xi}_0^2/2$. Чем больше отношение полного запаса энергии к энергии потерь за период, тем больше полных колебаний успеет сделать система до остановки. Поэтому отношение начальной энергии к энергии потерь за период служит *энергетической характеристикой затухания*:

$$\left(\frac{m\dot{\xi}_0^2}{2}\right)\left(r\,\frac{\dot{\xi}_0^2T}{2}\right)^{-1}=\frac{m}{rT}=\frac{\omega_0 m}{2\pi r}. \qquad (I.3.14)$$

Согласно (I.3.8), величина $\omega_0 m/r$, входящая в формулу (I.3.14), равна добротности Q. Обозначив полную колебательную энергию $W_п=m\dot{\xi}_0^2/2$, а энергию диссипации за период $W_д=r\dot{\xi}_0T/2$, получим

$$\frac{W_п}{W_д}=\frac{Q}{2\pi}. \qquad (I.3.15)$$

Это соотношение позволяет найти добротность системы, когда известны полная энергия $W_п$ колебаний и потери энергии $W_д$ за период.

§ I.4. ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ

Если на колебательную систему с потерями действовать периодической силой, то возникают вынужденные колебания, характер которых в той или иной мере повторяет изменения внешней силы.

Рассмотрим простейшую механическую систему (рис. I.4.1), на которую действует внешняя сила, генерируемая магнитным полем и изменяющаяся во времени по закону $F(t)$. Применяя закон Ньютона, получим

$$m\,\frac{d^2\xi}{dt^2}+r\dot{\xi}+\frac{1}{c}\,\xi=F(t), \qquad (I.4.1)$$