Подставляя первое и третье слагаемые в форме дифференциалов кинетической и потенциальной энергий, найдем:

$$d\left(\frac{m\dot{\xi}^2}{2}+\frac{\xi^2}{2c}\right)=-r\dot{\xi}^2\,dt,$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m\dot{\xi}^2}{2}+\frac{\xi^2}{2c}\right)=-r\dot{\xi}^2. \qquad (I.3.12)$$

Это значит, что убыль энергии системы $\frac{d}{dt}\left(\frac{m\dot{\xi}^2}{2}+\frac{\xi^2}{2c}\right)$ равна той энергии, которую поглощает активное сопротивление в единицу времени. При этом надо иметь в виду, что активное сопротивление обусловлено трением, излучением акустических волн и другими потерями. Очевидно, что потери энергии за период могут быть оценены интегрированием (I.3.12) в пределах от t до $t+T$:

$$\int_t^{t+T} r\dot{\xi}^2\,dt=r\dot{\xi}_0\int_t^{t+T}\sin^2\omega t\,dt=\frac{r\dot{\xi}_0^2T}{2}. \qquad (I.3.13)$$

Если начальная скорость равна $\dot{\xi}_0$, а потенциальная энергия — нулю, то начальный запас колебательной энергии $m\dot{\xi}_0^2/2$. Чем больше отношение полного запаса энергии к энергии потерь за период, тем больше полных колебаний успеет сделать система до остановки. Поэтому отношение начальной энергии к энергии потерь за период служит *энергетической характеристикой затухания*:

$$\left(\frac{m\dot{\xi}_0^2}{2}\right)\left(r\,\frac{\dot{\xi}_0^2T}{2}\right)^{-1}=\frac{m}{rT}=\frac{\omega_0 m}{2\pi r}. \qquad (I.3.14)$$

Согласно (I.3.8), величина $\omega_0 m/r$, входящая в формулу (I.3.14), равна добротности Q. Обозначив полную колебательную энергию $W_{\text{п}}=m\dot{\xi}_0^2/2$, а энергию диссипации за период $W_{\text{д}}=r\dot{\xi}_0T/2$, получим

$$\frac{W_{\text{п}}}{W_{\text{д}}}=\frac{Q}{2\pi}. \qquad (I.3.15)$$

Это соотношение позволяет найти добротность системы, когда известны полная энергия $W_{\text{п}}$ колебаний и потери энергии $W_{\text{д}}$ за период.

§ I.4. ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ

Если на колебательную систему с потерями действовать периодической силой, то возникают вынужденные колебания, характер которых в той или иной мере повторяет изменения внешней силы.

Рассмотрим простейшую механическую систему (рис. I.4.1), на которую действует внешняя сила, генерируемая магнитным полем и изменяющаяся во времени по закону $F(t)$. Применяя закон Ньютона, получим

$$m\,\frac{d^2\xi}{dt^2}+r\dot{\xi}+\frac{1}{c}\,\xi=F(t), \qquad (I.4.1)$$

где m, r, c — масса, механическое сопротивление и гибкость системы.

Если закон $F(t)$ представляет собой сложную функцию времени, то решение этого линейного неоднородного уравнения можно свести к решению задачи о колебаниях под действием гармонических сил, поскольку почти во всех случаях нестационарные силы, действующие на колебательную систему, описываются функциями, которые можно представить в виде ряда или интеграла Фурье. Таким образом, сложная задача о вынужденных колебаниях может быть сведена к более простой — решению дифференциальных уравнений вида

$$m\frac{d\dot{\xi}}{dt}+r\dot{\xi}+\frac{1}{c}\int_0^t \dot{\xi}(t)\,dt=F_0\cos\omega t, \tag{I.4.2}$$

где ω — круговая частота возбуждающей силы.

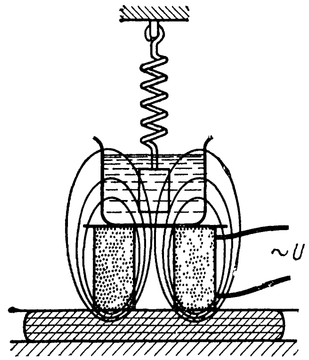

Рис. I.4.1

Здесь и в последующих главах будем применять метод комплексных величин. Его сущность состоит в том, что круговые функции, встречающиеся в некоторых задачах теории колебаний, заменяют комплексными экспоненциальными функциями по формулам Эйлера:

$$\begin{aligned} e^{j\omega t}&=\cos\omega t+j\sin\omega t,\\ \cos\omega t&=\frac{1}{2}\left(e^{j\omega t}+e^{-j\omega t}\right),\\ \sin\omega t&=\frac{1}{2j}\left(e^{j\omega t}-e^{-j\omega t}\right). \end{aligned} \tag{I.4.3}$$

В результате получают решение в виде комплексной функции. Действительная часть этого решения является искомой функцией, если операции при решении задачи были линейные. Следует заметить, что при всех линейных операциях (таких, как сложение, дифференцирование, интегрирование и др.) применение комплексного метода значительно упрощает расчетные соотношения. Например, требуется найти сумму нескольких гармонических функций:

$$\cos\omega t+\cos(\omega t+\varphi)+\cos(\omega t+2\varphi)+\ldots+\cos[(\omega t+(m-1)\varphi].$$

Тогда вместо проведения довольно громоздких операций над гармоническими функциями каждый член искомой функции заменяют соответствующей комплексной (экспоненциальной) и проводят операцию суммирования над комплексными функциями:

$$e^{j\omega t}+e^{j(\omega t+\varphi)}+e^{j(\omega t+2\varphi)}+\ldots+e^{j[\omega t+(m-1)\varphi]}=$$
$$=e^{j\omega t}\left(1+e^{j\varphi}+\ldots+e^{j(m-1)\varphi}\right).$$

Учитывая, что в скобках стоит геометрическая прогрессия со знаменателем $e^{j\varphi}$, получим $e^{j\omega t}\dfrac{e^{jm\varphi}-1}{e^{j\varphi}-1}$. Действительная часть этой комплексной функции есть сумма гармонических функций. При всех линейных операциях выполняется правило: *сумма действительных слагаемых равна действительной части результата, а сумма мнимых слагаемых — мнимой части.*

Нетрудно показать, что это правило не распространяется на нелинейные операции, в частности на умножение комплексных чисел, и комплексный метод в этом случае неприменим. Однако, если необходимо вычислить квадрат амплитуды, можно воспользоваться другим правилом: *произведение комплексного числа* $A=ae^{j\varphi}$ *на комплексно-сопряженное* $B^*=be^{-j\varphi}$ *равно произведению модулей этих чисел*:

$$AB^*=ab. \tag{I.4.4}$$

Решение неоднородного уравнения (I.4.2) будем искать в виде суммы общего решения ξ_1 однородного уравнения

$$m\ddot{\xi}_1+r\dot{\xi}_1+\frac{1}{c}\xi_1=0$$

и частного решения ξ_2 уравнения с правой частью (I.4.2)

$$m\ddot{\xi}_2+r\dot{\xi}_2+\frac{1}{c}\xi_2=F_0\cos\omega t.$$

Первое совпадает с дифференциальным уравнением затухающих колебаний. Его решение и представлено формулами (I.3.4) и (I.3.5). Для нахождения частного решения уравнения (I.4.2) запишем его в виде уравнения для скорости

$$m\frac{d\dot{\xi}_2}{dt}+r\dot{\xi}_2+\frac{1}{c}\int_0^t\dot{\xi}_0\,dt=F_0\cos\omega t \tag{I.4.5}$$

и воспользуемся методом комплексных функций. Согласно этому методу, будем искать решение уравнения, отличающееся от (I.4.5) только тем, что сила $F_0\cos\omega t$ представляется символически в виде комплексной экспоненциальной функции $F_0e^{j\omega t}$, а искомая функция заменяется в нем комплексной функцией $\tilde{\dot{\xi}}(t)$. Иначе говоря, вместо (I.4.5) будем решать уравнение с комплексными функциями:

$$m\frac{d\tilde{\dot{\xi}}}{dt}+r\tilde{\dot{\xi}}+\frac{1}{c}\int_0^t\tilde{\dot{\xi}}\,dt=F_0e^{j\omega t}. \tag{I.4.6}$$

Допустим, что решение (I.4.6) существует в виде комплексной экспоненциальной функции

$$\tilde{\dot{\xi}}=\tilde{\dot{\xi}}_0e^{jpt}, \tag{I.4.7}$$

где p — частота вынужденных колебаний.

Простой подстановкой (I.4.7) в (I.4.6) получим тождество

$$\left(mjp+r+\frac{1}{jpc}\right)\tilde{\dot{\xi}}_0e^{jpt}=F_0e^{j\omega t}, \tag{I.4.8}$$

из которого следует, что частота p вынужденных гармонических колебаний равна частоте ω вынуждающей силы:

$$p=\omega, \tag{I.4.9}$$

т. е. частота вынужденных колебаний не зависит от параметров системы.

Комплексная величина $\tilde{\dot{\xi}}$ определяется амплитудой F_0 и частотой ω вынуждающей силы и, кроме того, параметрами колебательной системы m, r и c. Выражение для комплексной амплитуды скорости $\tilde{\dot{\xi}}_0$ легко получить из (I.4.8) с учетом (I.4.9):

$$\tilde{\dot{\xi}}_0 = \frac{F_0}{r + j\,[\omega m - 1/(\omega c)]}. \qquad (I.4.10)$$

Комплексную величину, стоящую в знаменателе формулы (I.4.10), называют *комплексным механическим сопротивлением*, или *механическим импедансом колебательной системы*:

$$\tilde{z} = r + j\left(\omega m - \frac{1}{\omega c}\right) = z_0 e^{j\varphi}, \qquad (I.4.11)$$

где

$$z_0 = \sqrt{r^2 + \left(\omega m - \frac{1}{\omega c}\right)^2}, \quad \varphi = \operatorname{arctg}\frac{\omega m - 1/(\omega c)}{r}. \qquad (I.4.12)$$

С учетом этих соотношений формула комплексной амплитуды скорости (I.4.10) имеет вид

$$\tilde{\dot{\xi}}_0 = \frac{F_0}{\tilde{z}} = \frac{F_0}{\sqrt{r^2 + [\omega m - 1/(\omega c)]^2}}\, e^{-j\varphi}, \qquad (I.4.13)$$

а решение (I.4.7) при $p = \omega$ представляется комплексной экспоненциальной функцией

$$\tilde{\dot{\xi}} = \tilde{\dot{\xi}}_0 e^{j\omega t} = \frac{F_0}{z_0} e^{j(\omega t - \varphi)}. \qquad (I.4.14)$$

Проводя операцию интегрирования (I.4.14), получим искомую комплексную функцию для смещения

$$\tilde{\xi} = \frac{\tilde{\dot{\xi}}_0}{j\omega} e^{j\omega t} = \frac{F_0}{\omega z_0} e^{j(\omega t - \varphi - \pi/2)}. \qquad (I.4.15)$$

Реальные части комплексных функций (I.4.14) и (I.4.15) полностью отвечают физическим процессам при вынужденных стационарных колебаниях:

$$\dot{\xi}_2 = \frac{F_0}{z_0}\cos(\omega t - \varphi) = \frac{F_0}{\sqrt{r^2 + [\omega m - 1/(mc)]^2}}\cos(\omega t - \varphi), \qquad (I.4.16)$$

$$\xi_2 = \frac{F_2}{\omega z_0}\cos\left(\omega t - \varphi - \frac{\pi}{2}\right). \qquad (I.4.17)$$

Полное решение задачи о вынужденных гармонических колебаниях механической системы содержит решение для свободных колебаний (I.3.4) и решение (I.4.17):

$$\xi = \xi_1 + \xi_2,$$

$$\xi = e^{-\delta t} A \cos(\omega_0 t - \alpha) + \frac{F_0}{\omega z_0}\cos(\omega t - \varphi), \qquad (I.4.18)$$

где $\delta = r/(2m)$; A и α — амплитуда и фаза, которые находят по начальным условиям; ω_0 — собственная частота свободных колебаний.

Первое слагаемое (I.4.18) дает представление о переходном процессе, который длится в течение времени $\tau = 1/\delta$. Спустя некоторое время $(t \gg \tau)$, оно полностью обратится в нуль и наступят установившиеся вынужденные колебания.

Анализируя выражение для амплитуды скорости колебаний (I.4.16), заключаем, что она максимальна при условии

$$\omega m - \frac{1}{\omega c} = 0,$$

так как $z_0 = \sqrt{r^2 + \left(\omega m - \frac{1}{\omega c}\right)^2} = r.$

Отсюда следует, что частота $\omega_р$, при которой скорость имеет максимальную амплитуду, совпадает с частотой собственных незатухающих колебаний механической системы:

$$\omega_р = \sqrt{1/(mc)}. \qquad (I.4.19)$$

При этом максимальная амплитуда скорости равна $\dot{\xi}_{0\max} = F_0/r$, а фаза φ совпадает с фазой внешней силы.

Явление, при котором амплитуда скорости достигает максимального значения, называют *механическим резонансом.*

Для анализа характеристик вынужденных колебаний удобно пользоваться безразмерными величинами. Введем безразмерные импеданс z', частоту n и скорость $\dot{\xi}'$ как отношения соответствующих величин, когда система имеет частоту ω, к их числовым значениям при частоте резонанса $\omega_р$:

$$\tilde{z}' = \frac{\tilde{z}}{r}, \quad n = \frac{\omega}{\omega_р}, \quad \tilde{\dot{\xi}}_0' = \frac{\tilde{\dot{\xi}}_0}{\tilde{\dot{\xi}}_{0р}}.$$

Тогда из (I.4.11) с учетом (I.4.19) следует

$$\tilde{z}' = 1 + j\frac{\omega m - 1/(\omega c)}{r} = 1 + j\frac{\omega_р m}{r}\left(\frac{\omega}{\omega_р} - \frac{\omega_р}{\omega}\right),$$

или

$$\tilde{z}' = 1 + jQ\gamma = z_0' e^{j\varphi}, \qquad (I.4.20)$$

где Q — добротность; $\gamma = \omega/\omega_р - \omega_р/\omega$ — частотная переменная колебательной системы; $z_0' = z_0/r = \sqrt{1 + Q^2\gamma^2}$ — модуль приведенного комплексного импеданса; $\varphi = \operatorname{arctg} Q\gamma$ — фаза импеданса относительно силы.

Отношение комплексной амплитуды скорости $\tilde{\dot{\xi}}_0$ к амплитуде скорости при резонансе может быть вычислено по формуле

$$\tilde{\dot{\xi}}_0' = \frac{\tilde{\dot{\xi}}_0}{\tilde{\dot{\xi}}_{0р}} = \frac{F/\tilde{z}}{F/r} = \frac{1}{\tilde{z}/r} = \frac{1}{\tilde{z}'}.$$

Учитывая (I.4.20), получим

$$\tilde{\dot{\xi}}_0 = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2\gamma^2}} e^{-j\varphi}.$$

На рис. I.4.2 даны резонансные кривые колебательных систем с разными добротностями [$\dot{\xi}/\dot{\xi}_0$ — отношение амплитуды колебательной скорости к соответственной амплитуде колебательной скорости при резонансе (*а*) и φ — сдвиг фаз между силой и колебательной скоростью (*б*)].

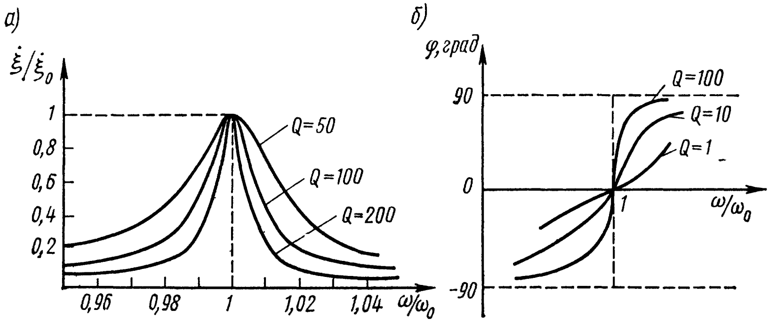

Рис. I.4.2

В отличие от свободных колебаний поведение колебательных систем под действием гармонической силы определяется не только параметрами системы, но и частотой внешнего воздействия. Мы видим, что смещение, скорость и ускорение вынужденных колебаний имеют частоту, не зависящую от параметра колебательной системы, и выражаются формулами:

$$\xi = \xi_0 \cos(\omega t - \alpha),$$
$$\dot{\xi} = -\omega\xi_0 \sin(\omega t - \alpha),$$
$$\ddot{\xi} = -\omega^2\xi_0 \cos(\omega t - \alpha),$$

или при использовании безразмерной частоты:

$$\begin{aligned} \xi &= \xi_0 \cos(n\omega_0 t - \alpha), \\ \dot{\xi} &= -n\omega_0\xi_0 \sin(n\omega_0 t - \alpha), \\ \ddot{\xi} &= -n^2\omega_0^2\xi_0 \cos(n\omega_0 t - \alpha). \end{aligned} \tag{I.4.21}$$

Для сравнения сил, определяющих поведение системы при различных частотах, подставим (I.4.21) в (I.4.1):

$$-m\xi_0 n^2\omega_0^2 \cos(n\omega_0 t - \alpha) - r\xi_0 n\omega_0 \sin(n\omega_0 t - \alpha) + \\ + \frac{1}{c}\cos(n\omega_0 t - \alpha) = F_0 \cos n\omega_0 t. \tag{I.4.22}$$

Первый член тождества — это сила инерции, второй — сила вязкого трения, третий — сила упругости.

Тождество выражает *условие динамического равновесия* суммы этих сил с силой внешнего возбуждения.

При частотах, значительно меньших резонансной ($n \ll 1$), роль первых двух сил ничтожно мала, так как их сумма значительно меньше силы упругости. В этом случае внешняя сила уравновешивается практически только силой упругости и можно сказать, что система управляется упругостью. Тогда (I.4.22) принимает вид

$$F_0 \cos(n\omega_0 t) = \frac{\xi_0}{c} \cos(n\omega_0 t - \alpha).$$

Если система управляется упругостью, то частота вынуждающей силы меньше резонансной, фаза смещения совпадает с фазой силы, а амплитуда смещения определяется формулой $\xi_0 = cF_0$.

При частотах возбуждения ω, близких к резонансной частоте $\omega_p = \omega_0$, главную роль играют силы трения. Действительно, при $n = 1$ (I.4.22) можно представить в виде

$$\left(\frac{1}{c} - m\omega_0^2\right) \xi_0 \cos(\omega_0 t - \alpha) - \omega_0 r \sin(\omega_0 t - \alpha) = F_0 \cos(\omega_0 t).$$

Так как $\omega_0^2 = 1/(mc)$, то первое слагаемое равно нулю. Остается только слагаемое, выражающее мгновенное значение силы сопротивления:

$$\omega_0 r \sin(\omega_0 t - \alpha)\, \xi_0 = F_0 \cos \omega_0 t.$$

Полученное равенство должно выполняться при любом значении времени t. Отсюда следует: $\sin(\omega_0 t - \alpha) = \cos \omega_0 t$ и $F_0 = \omega_0 r \xi_0$. Из первого равенства получаем $\alpha = -\pi/2$, а из второго следует, что если частота совпадает с резонансной, то фаза мгновенного смещения не равна фазе вынуждающей силы, а превышает ее на $\pi/2$ и амплитуда смещения пропорциональна силе и обратно пропорциональна частоте ω_0:

$$\xi_0 = F_0/(\omega_0 r).$$

Точно так же можно показать, что при резонансной частоте ($n = 1$) фазы скорости $\dot{\xi}$ и вынуждающей силы F совпадают. Заметим, что для систем, управляемых трением, силы, возникающие на упругом элементе, и силы инерции равны по модулю, но противоположны по направлению, поэтому происходит их компенсация.

Наконец, при условии, когда частота внешнего воздействия значительно больше резонансной ($n \gg 1$), действия сил упругости и трения во время колебаний системы пренебрежимо малы и система управляется массой. Можно показать, что в этом случае фаза ускорения совпадает с фазой силы, а амплитуда ускорения равна $\ddot{\xi}_0 = F_0/m$.

Итак, колебательные системы условно можно разделить на системы, управляемые упругостью, трением и массой. Особенности подобных систем полностью выявляются на основании анализа частотных свойств импеданса:

$$\frac{F_0}{\dot{\xi}_0} = z = r\sqrt{1 + Q^2\gamma^2}\, e^{j\varphi},$$

где γ — частотная переменная;

$$\gamma = n - 1/n, \quad n = \omega/\omega_0, \quad \varphi = \operatorname{arctg} \gamma Q. \qquad (I.4.23)$$

При низких частотах $(n \ll 1)$ частотная переменная $\gamma \approx -1/n$, откуда следует, что импеданс z обратно пропорционален приведенной частоте n:

$$|z|_{n \ll 1} = r\sqrt{1 + Q^2 \frac{1}{n^2}} \approx r\frac{Q}{n}.$$

При этом колебательная скорость

$$\dot{\xi}_0 = \frac{F_0}{rQ} n \cos(\omega t - \varphi),$$

где $\varphi = \operatorname{arctg} \gamma Q \approx \operatorname{arctg}(-\infty) = -\pi/2$ при $n \ll 1$*.

При частоте, близкой к резонансной, частотная переменная $\gamma \approx \approx 0$ и импеданс выражается только механическим сопротивлением r. Тогда амплитуда и фаза скорости равны

$$\dot{\xi}_0 = F_0/r \text{ и } \varphi = \operatorname{arctg}(\gamma Q) \approx 0.$$

Это случай системы, управляемой трением.

Если частота больше резонансной $(n \gg 1)$, то частотная переменная, входящая в формулу импеданса, $\gamma \approx n$, и импеданс может быть вычислен с помощью формул

$$\gamma \approx n, \quad z_{n \gg 1} = rQe^{j\varphi},$$

где $\varphi = \operatorname{arctg}(Qn) \approx \pi/2$.

Соответственно комплексная скорость определяется формулой

$$\dot{\tilde{\xi}} = \frac{F_0}{rQn} e^{-j\pi/2} e^{jn\omega_0 t}.$$

Действительная часть ее является гармонической функцией:

$$\dot{\xi} = \frac{F_0}{rQn} \cos\left(n\omega_0 t - \frac{\pi}{2}\right).$$

Это случай системы, управляемой массой. Здесь скорость отстает по фазе от внешнего воздействия на 90°.

Ускорение

$$\ddot{\xi} = \frac{F_0\omega_0}{rQ} \cos n\omega_0 t$$

совпадает с силой по фазе и имеет амплитуду, не зависящую от частоты воздействия и определяемую амплитудой внешней силы и параметрами колебательной системы.

Отметим еще раз следующие особенности колебательного движения перечисленных выше систем: *для системы, управляемой трением, амплитуда скорости колебаний не зависит от частоты, а скорость совпадает по фазе с действующей силой; для системы, управляемой*

---

* При низких частотах колебательная скорость опережает силу F по фазе на $+\pi/2$ и имеет амплитуду $F_0/(rQ)$.

упругостью, от частоты не зависит смещение; для инерциональной системы ускорение не зависит от частоты. Эти закономерности используют при конструировании приборов для измерения амплитуды колебаний. Одним из условий для этих приборов является независимость их показаний от частоты. В связи с этим для измерения амплитуды скорости используют системы, управляемые сопротивлением (датчики скорости), в датчиках же смещения применяют систему, управляемую упругостью; в датчиках ускорения — систему, управляемую массой.

Для характеристики остроты резонансной кривой существует понятие *ширина полосы пропускания*, под которой подразумевают область частот, где колебательная энергия больше половины энергии при резонансе. Тогда скорость, соответствующая границам полосы, равна $\dot{\xi}_0/\sqrt{2}$.

Для практических вычислений удобно использовать формулу импеданса (I.4.23). Для области частот вблизи резонанса частотную переменную можно привести к виду $\gamma \approx 2\Delta\omega/\omega_0$.

Частотную переменную, соответствующую границам полосы пропускания, получают из следующих соображений: импеданс границ полосы пропускания равен $r\sqrt{2}$, но $\dot{\xi}_{\text{гр}} = \dot{\xi}_0/\sqrt{2} = F_0/(r\sqrt{2})$, поэтому, взяв модуль от $\tilde{z}$ из (I.4.20) и приравняв его к $r\sqrt{2}$, получим

$$r\sqrt{2} = r\sqrt{1+Q^2\gamma^2},$$

откуда следует

$$\gamma \simeq \frac{1}{Q} \approx \frac{2\Delta\omega}{\omega_0}, \tag{I.4.24}$$

где $2\Delta\omega$ — ширина полосы пропускания на уровне 0,7079; $1/Q = \gamma_{\text{гр}} = \eta$ — коэффициент потерь.

Согласно (I.3.8), добротность равна отношению инерционного сопротивления при резонансе к коэффициенту трения: $Q = \omega_0 m/r$.

Отсюда следует, что коэффициент потерь выражается формулой

$$\eta = \frac{1}{Q} = \frac{r}{\omega_0 m}, \tag{I.4.25}$$

или, поскольку при резонансе инерционное сопротивление $\omega_0 m$ равно упругому $1/(\omega_0 c)$,

$$\eta = r\omega_0 c.$$

Покажем, что задача о вынужденных колебаниях, когда система находится под действием нестационарной силы, сводится к задаче о гармонических вынужденных колебаниях.

Для случая, когда функцию $F(t)$ можно разложить в ряд Фурье,

$$F(t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu \varepsilon_\nu \cos(\omega_\nu t - \varphi_\nu), \tag{I.4.26}$$

где

$$\varepsilon_\nu = \begin{cases} 1/2 \text{ при } \nu = 0, \\ 1 \text{ при } \nu \neq 0; \end{cases} \quad \omega_\nu = \nu \frac{2\pi}{T} = \nu\omega;$$

$$A_\nu = \frac{2}{T}\left[\left(\int_0^T F(t)\cos\omega_\nu t\,dt\right)^2 + \left(\int_0^T F(t)\sin\omega_\nu t\,dt\right)^2\right];$$

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{\int_0^T F(t)\sin\omega_\nu t\,dt}{\int_0^T F(t)\cos\omega_\nu t\,dt}.$$

Тогда уравнение вынужденных колебаний запишем в виде

$$m\frac{d^2\xi}{dt^2} + r\frac{d\xi}{dt} + \frac{1}{c}\xi = \sum_\nu A_\nu\varepsilon_\nu\cos(\omega_\nu t - \varphi_\nu). \tag{I.4.27}$$

Решение этого неоднородного уравнения состоит из решения уравнения свободных колебаний и частного решения уравнения с правой частью:

$$\xi = \xi_1(t) + \xi_2(t).$$

Функция ξ_1 не зависит от вида закона вынуждающей силы. Она представляет собой затухающие колебания и имеет вид (I.3.4).

Для нахождения ξ_2 поступим следующим образом. Перейдем от (I.4.27) к уравнению для скорости $\dot{\xi}$:

$$m\frac{d\dot{\xi}_2}{dt} + r\dot{\xi}_2 + \frac{1}{c}\int\dot{\xi}_2\,dt = \sum_\nu A_\nu\varepsilon_\nu\cos(\omega_\nu t - \varphi_\nu). \tag{I.4.28}$$

Воспользуемся символическим методом. С этой целью запишем уравнение (I.4.28) в комплексном виде:

$$m\frac{d\tilde{\dot{\xi}}_2}{dt} + r\tilde{\dot{\xi}}_2 + \frac{1}{c}\int_0^t\tilde{\dot{\xi}}_2\,dt = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty}\tilde{A}_\nu e^{j\omega_\nu t}, \tag{I.4.29}$$

где $\tilde{A}_\nu = A_\nu e^{-i\varphi_\nu}$ — комплексная амплитуда силы: $\tilde{A}_\nu = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} F(t)\times$ $\times e^{-j\omega_\nu t}\,dt$ $\omega_\nu = \nu\frac{2\pi}{T} = \nu\omega$.

Решение (I.4.29) ищем в виде суммы комплексных экспоненциальных функций:

$$\tilde{\dot{\xi}}_2 = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty}\tilde{\dot{\xi}}_{0\nu}e^{jp_\nu t}. \tag{I.4.30}$$

Учитывая (I.4.29), получим тождество

$$\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty}\left(mjp_\nu + r + \frac{1}{jp_\nu c}\right)e^{jp_\nu t} = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty}\tilde{A}_\nu e^{j\omega_\nu t},$$

которое может быть выполнено при $p_\nu = \omega_\nu$. Тогда

$$\tilde{\dot{\xi}}_{0\nu} = \frac{\tilde{A}_\nu}{r + j[m\omega_\nu - 1/(\omega_\nu c)]}. \tag{I.4.31}$$

Таким образом, частное решение неоднородного уравнения (I.4.29) представляется рядом

$$\tilde{\dot{\xi}}_2 = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \frac{\tilde{A}_\nu}{r + j\,[m\omega_\nu - 1/(\omega_\nu c)]} e^{j\omega_\nu t}, \tag{I.4.32}$$

откуда смещение определяется путем интегрирования:

$$\tilde{\xi}_2 = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \frac{\tilde{A}_\nu}{j\,\omega_\nu \{r + j\,[m\omega_\nu - 1/(\omega_\nu c)]\}} e^{j\omega_\nu t},$$

или

$$\tilde{\xi}_2 = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \frac{A_\nu}{\sqrt{r^2 + [m\omega_\nu - 1/(\omega_\nu c)]^2}} \frac{1}{\omega_\nu} e^{j(\omega_\nu t - \varphi_\nu - \pi/2)},$$

где $\varphi_\nu = \operatorname{arctg} \dfrac{m\omega_\nu - 1(\omega_\nu c)}{r}$.

Действительная часть этой функции

$$\tilde{\xi}_2 = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \frac{A_\nu}{\omega_\nu \sqrt{r^2 + [m\omega_\nu - 1/(\omega_0 c)]^2}} \cos\left(\omega_\nu t - \varphi_\nu - \frac{\pi}{2}\right)$$

есть искомое решение (I.4.27), где A_ν и φ_ν вычисляют по формулам (I.4.26).

Пример. Найти функцию колебательной скорости вынужденных колебаний груза массой m, подвешенного на пружине и находящегося под действием силы

$$F(t) = F_0 \left[\cos(\omega t) + \frac{\sin(3\omega t)}{3}\right].$$

Решение. Уравнение движения в этом случае имеет вид

$$m\frac{d\dot{\xi}}{dt} + r\dot{\xi} + \frac{1}{c}\int \dot{\xi}\,dt = F_0\left[\cos(\omega t) + \frac{1}{3}\sin(3\omega t)\right].$$

Сила $F(t)$ содержит только две гармонические частоты: ω и 3ω. Поэтому ряд (I.4.26) имеет только два слагаемых: $\nu=1$ и $\nu=3$. Для них $A_1 = F_0$ и $A_3 = F_0/3$, $\varphi_0 = 0$, $\varphi_3 = \pi/2$. Подставляя эти величины в (I.4.32), получим

$$\dot{\xi} = F_0 \frac{1}{r + j\,[m\omega - 1/(\omega c)]} e^{j\omega t} + \frac{F_0}{3} \frac{1}{r + j\,[3m\omega - 1/(3\omega c)]} e^{j(3\omega t - \pi/2)}.$$

Определив действительную часть этой комплексной функции, получим решение задачи:

$$\dot{\xi} = \frac{F_0}{\sqrt{r^2 + [\omega m - 1/(\omega c)]^2}} \cos(\omega t - \varphi_1) + \frac{F_0}{3\sqrt{r^2 + [3\omega m - 1/(3\omega c)]^2}} \sin(3\omega t - \varphi_3),$$

где $\varphi_1 = \operatorname{arctg}\dfrac{\omega m - 1/(\omega c)}{r}$, $\varphi_3 = \operatorname{arctg}\dfrac{3\omega m - 1/(3\omega c)}{r}$.

Анализ решения. Если частота ω равна частоте свободных колебаний системы $\omega_p = \sqrt{1/(mc)}$, то

$$\dot{\xi} = \frac{F_0}{r}\cos\omega_p t + \frac{F_0}{3\sqrt{r^2 + (64m^2)/\omega_p^2}}\sin(3\omega_p t - \varphi'),$$

где $\quad \operatorname{arctg}\varphi' = \dfrac{8m\omega_p}{3r}$.

Если функция $F(t)$ не периодическая, то вместо разложения в ряд Фурье для решения уравнения с правой частью используют интегральное преобразование Фурье. В этом случае $F(t)$ можно представить в виде интеграла Фурье:

$$F(t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega t} S(\omega)\, d\omega, \tag{I.4.33}$$

причем

$$S(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega t} F(t)\, dt. \tag{I.4.34}$$

Интеграл (I.4.33) называют обратным, а (I.4.34) — прямым преобразованием Фурье; $S(\omega)$ называют *изображением функции* $F(t)$.

Использование прямого и обратного преобразований Фурье — полезный метод решения линейных дифференциальных и интегральных уравнений.

Пусть имеется уравнение

$$m\frac{d\dot{\xi}}{dt} + r\dot{\xi} + \frac{1}{c}\int \dot{\xi}\, dt = F(t).$$

Умножим его на $e^{-j\omega t}$ и проинтегрируем в пределах от $-\infty$ до $+\infty$:

$$m\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\dot{\xi}}{dt}e^{-j\omega t}\, dt + r\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\dot{\xi}e^{-j\omega t}\, dt + \frac{1}{c}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left[\int\limits_{0}^{t}\dot{\xi}(\tau)\, d\tau\right]e^{-j\omega t}\, dt = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}F(t)\, e^{-j\omega t}\, dt.$$

В результате интегрирования по частям первого и третьего интегралов слева получим алгебраическое уравнение относительно изображения искомой функции $\dot{\xi}(t)$:

$$S(\omega)\left(j\omega m + r + \frac{1}{j\omega c}\right) = S_F(\omega) \tag{I.4.35}$$

[$S(\omega)$ и $S_F(\omega)$ — изображения (I.4.33) искомой функции и функции возбуждения].

Уравнение может быть выполнено, если

$$S(\omega) = \frac{S_F(\omega)}{r + j\,[\omega m - 1/(\omega c)]}.$$

Проводя обратное преобразование по (I.4.33), восстанавливаем по изображению $S(\omega)$ оригинал $\dot{\xi}(t)$:

$$\dot{\xi}(t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega t}\frac{S_F(\omega)}{r + j\,[\omega m - 1/(\omega c)]}\, d\omega, \tag{I.4.36}$$