ГЛАВА II
КОЛЕБАНИЯ С НЕСКОЛЬКИМИ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

§ II.1. СИСТЕМЫ С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ

Механические и акустические системы в практических расчетах являются большей частью сложными упругими системами. Это стержни постоянного и переменного сечений, пластины различной формы, механические конструкции, содержащие полости, заполненные жидкостью или газом, трубы постоянного и переменного сечений, элементы электроакустических преобразователей и т. д.

Для полного определения деформаций, возникающих в таких сложных системах при колебаниях, необходимо знать перемещения всех точек системы. Иначе говоря, необходимо найти бесконечное число функций координат и времени, определяющих состояние движения системы. Другими словами, мы имеем системы с бесконечным числом степеней свободы.

В связи с этим изучение колебаний сплошных упругих систем возможно только при введении определенных упрощений — идеализаций, позволяющих получить решение задачи с некоторым приближением к действительности.

Обычно вместо реальной механической системы рассматривают идеализированную модель, в которой распределение масс и упругих связей реальной системы заменено сходным, но более простым распределением, приводящим в то же время к расчетным результатам искомых величин, не слишком отличающихся от действительных.

В результате такой идеализации система с бесконечным числом степеней свободы заменяется эквивалентной системой с конечным числом степеней свободы.

Рассмотрим несколько случаев приведения сложной системы к простой.

Груз расположен на пружине, нижний конец которой прикреплен к жесткому основанию. Если учитывать массу пружины и упругость материала груза, то это система с бесконечным числом степеней свободы, в которой упругость и масса сложным образом распределены между ее элементами. Но если масса груза значительно больше массы пружины и в то же время деформации материала груза значительно меньше деформаций пружины, то вместо реальной системы для нахождения наименьшей собственной частоты можно рассматривать идеализированную модель, в которой масса пружины и деформация материала груза не приняты во внимание. В этом случае вместо параметров, непрерывно распределенных в действительной системе, вводят параметры по составным частям модели. В частности, в данном примере массу целесообразно расположить вблизи центра масс груза; гибкость системы сосредоточивают в пружинах. Если, кроме того, учесть возможности смещений груза в горизонтальной плоскости вдоль взаимно перпендикулярных осей, то получим представление о двух дополнительных степенях свободы движения вдоль осей X и Y. В первом приближении реальная колебательная система может описываться как система с одной степенью свободы. Если требуется учесть боковые качания груза, то она должна описываться как система с тремя степенями свободы.

Рассмотрим систему, состоящую из стержня, на концах которого прикреплены два тела, массы которых значительно больше массы стержня. Допустим, что под воздействием одной и той же силы продольная деформация стержня значительно больше деформации присоединенных грузов. Если пренебречь изгибными деформациями стержня, то данную систему можно принять за систему с одной степенью свободы. В тех случаях, когда такое упрощение недопустимо, система может быть заменена моделями, имеющими две или три степени свободы.

Если стержень выполнен из магнитострикционного материала, т. е. способен деформироваться под действием магнитного поля переменного электрического тока, то колебательная система продольных колебаний масс может быть сведена к электромеханической колебательной системе с двумя степенями свободы, причем одна из них механическая, а другая — электрическая. Механические колебания воздействуют на электрические колебания в контуре. С другой стороны, электрические колебания будут действовать на механические. Таким образом, колебания различных степеней свободы взаимодействуют, образуя связанную колебательную систему.

Прежде чем рассматривать колебательные системы со многими степенями свободы, напомним некоторые общие положения теоретической механики.

Механическую систему называют *несвободной*, если входящие в нее материальные точки или тела при своем движении имеют ограничения, которые называют *связями*. Для составления уравнений движения несвободных механических систем часто пользуются методами Даламбера и Лагранжа.

Метод Даламбера. Силу $\mathbf{F}$, действующую на несвободную материальную частицу, согласно Даламберу, представляют в виде геометрической суммы сил $\mathbf{P}$, не вызывающей ускорения движения частицы, и $\mathscr{F}$, сообщающей частице ускоренное движение, допустимое связями:

$$\mathbf{F} = \mathbf{P} + \mathscr{F}, \qquad (II.1.1)$$

где $\mathscr{F} = m\mathbf{a}$; $\mathbf{a}$ — ускорение частицы с массой m.

Сила $\mathbf{P}$ уравновешивается реакциями связей, т. е. силами $-\mathbf{R}$, вызывающими фактическое ограничение движения точки. Движущая сила $\mathscr{F} = m\mathbf{a}$, согласно принципу Даламбера, как бы уравновешивается силой

$$\mathbf{\Phi} = -\mathscr{F} = -m\mathbf{a}, \qquad (II.1.2)$$

которую называют *силой инерции* движущейся точки. Сам по себе вектор $\mathbf{\Phi}$, изображающий эту силу, свободен. Но если его приложить к частице с массой m, то он будет представлять собой фиктивную, т. е. физически несуществующую силу, называемую *даламберовой силой инерции*, или просто *силой инерции*.

В результате введения в уравнение (II.1.1) динамики материальной частицы сил инерции $\mathbf{\Phi}$ и реакции связей $\mathbf{R}$ получим

$$\mathbf{F} = -\mathbf{R} - \mathbf{\Phi}.$$

Тогда уравнения динамики приобретают форму уравнений статики:

$$\mathbf{F} + \mathbf{R} + \mathbf{\Phi} = 0, \qquad (II.1.3)$$

где $\mathbf{F}$ — внешняя сила; $\mathbf{R}$ — сила реакции связей; $\mathbf{\Phi}$ — сила инерции, действующая на частицу, движение которой ограничено связями.

Если движется твердое тело, состоящее из n материальных точек, то система даламберовых сил инерции его частиц подчиняется всем законам геометрической статики, относящимся к силам, приложенным к телу, т. е. приводится к главному вектору **F** и главному моменту $\mathbf{M}_0$:

$$\mathbf{F} = \sum_{\alpha} \mathbf{\Phi}_\alpha = -\sum_{\alpha} m_\alpha \mathbf{a}_\alpha = m\mathbf{a}_c,$$

$$\mathbf{M} = \sum \mathbf{M}_\alpha (\mathbf{\Phi}_\alpha) = \sum \mathbf{M}_0 (-m_\alpha \mathbf{a}_\alpha) = \mathbf{M}_0 (M_{0x},\ M_{0y},\ M_{0z}),$$

$$M_{0x} = \varepsilon I_{xz} - \omega^2 I_{yz};\quad M_{0y} = \varepsilon I_{yz} - \omega^2 I_{xz};\quad M_{0z} = -\varepsilon I_{zz},$$

где $\alpha = 1, 2, 3, \ldots$; n — общее число материальных точек системы; m — масса всей системы; **a** — ускорение центра масс; M_{0x}, M_{0y} и M_{0z} — проекции главного момента сил инерции относительно начала O; I_{zz} — момент инерции вращения тела вокруг оси Z; I_{yz} и I_{xz} — произведения момента инерции; ε — угловое ускорение; ω — угловая скорость.

При этом в любой момент времени t между внешними силами F_α, силами реакций связей R_α и силами инерции $\mathbf{\Phi}_\alpha$, а также между моментами этих сил должны существовать уравнения геометрической статики:

$$\sum \mathbf{F}_\alpha + \sum \mathbf{R}_\alpha + \sum \mathbf{\Phi}_\alpha = 0, \tag{II.1.4}$$

$$\sum_{\alpha} \mathbf{M}_0 (\mathbf{F}_\alpha) + \sum \mathbf{M}_0 (\mathbf{R}_\alpha) + \sum \mathbf{M}_0 (\mathbf{\Phi}_\alpha) = 0, \tag{II.1.5}$$

где $\mathbf{M}_0 (\mathbf{F}_\alpha)$, $\mathbf{M}_0 (\mathbf{R}_\alpha)$, $\mathbf{M}_0 (\mathbf{\Phi}_\alpha)$ — моменты относительно точки O внешних сил, сил реакций связей, сил инерции, действующих на отдельную точку α системы.

Подставляя в (II.1.4) и (II.1.5) выражения главных векторов и главных моментов соответствующих сил ($\mathbf{F} = \sum \mathbf{F}_\alpha$; $\mathbf{R} = \sum \mathbf{R}_\alpha$; $\mathbf{\Phi} = \sum \mathbf{\Phi}_\alpha$), получим уравнения движения несвободной системы:

$$\mathbf{F} + \mathbf{R} + \mathbf{\Phi} = 0, \tag{II.1.6}$$

$$\mathbf{M}_0 (\mathbf{F}) + \mathbf{M}_0 (\mathbf{R}) + \mathbf{M}_0 (\mathbf{\Phi}) = 0. \tag{II.1.7}$$

Таким образом, для составления уравнений движения сложной механической колебательной системы, состоящей из отдельных звеньев с массами m_i, моментами инерции I_{0i} и ограниченными связями $\mathbf{R}_i$, находят для каждой массы и каждого момента инерции выражения результирующих сил и моментов сил, записывают для каждого узла формулы сил инерции и моментов сил инерции и образуют уравнения (II.1.6) и (II.1.7). В общем случае получают $6l$ уравнений (l — число звеньев системы).

Метод Даламбера удобно применять для таких колебательных систем, в которых не очень сложно найти выражения сил и моментов сил реакций связей, например для колебательных систем, в которых элементы массы, упругости и сопротивления расположены вдоль системы.

В качестве примера использования метода Даламбера проведем составление уравнений движения акустической системы, показанной на рис. II.1.1. Система состоит из узких трубок, соединенных объемами V_1, V_2, V_3. Отверстие крайней трубки открыто и через него действует избыточное акустическое давление $p(t)$, а отверстие трубки, расположенной на краю системы с противоположной стороны, закрыто пробкой. Размеры отдельных участков системы таковы, что можно считать ее системой с массами, сосредоточенными в трубках, и с упругостями, сосредоточенными в объемах. Обозначим массы газа в трубках m_1, m_2, m_3, m_4, а коэффициенты упругости объемов — s_1, s_2, s_3. Зная плотность ρ газа, длину l_i и площадь поперечного сечения S трубок, найдем формулу для вычисления массы: $m_i = l_i S_i \rho$. Если известен коэффициент адиабатической сжимаемости $\beta_{ад}$ газа, то коэффициенты упругости отдельных объемов могут быть вычислены по формулам

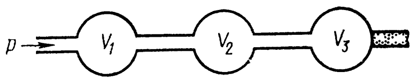

Рис. II.1.1

$$s_i = \frac{\delta p S_i}{\delta V_i / S_i} = -\frac{S_i^2}{V_i \beta_{ад}}.$$

Наконец, коэффициент сопротивления пробки приблизительно может быть вычислен по формуле Пуазейля:

$$r = 32\eta \left(\frac{l}{d^2}\right) \frac{1}{N},$$

где η — вязкость газа; N — число выходов капилляров на единицу площади поперечного сечения пробки; d — средний диаметр каналов.

Рассматриваемая система имеет центры масс, расположенные в состоянии равновесия в средних частях трубок. При движении каждая из масс получит смещение вдоль оси трубки. Обозначим эти малые смещения от положения равновесия x_1, x_2, x_3, x_4. На массу m_1 будут действовать составляющие упругих связей, возникающие вследствие деформации объема V_1 за счет перемещений x_1 и x_2: $-s_1(x_1 - x_2)$. Кроме того, на него действуют внешняя сила pS и сила инерции $-m_1\ddot{x}_1$. Складывая эти силы, согласно принципу Даламбера, получим первое уравнение движения:

$$m_1\ddot{x}_1 + s_1(x_1 - x_2) = pS.$$

На массу m_2 действуют реакции упругих объемов V_1 и V_2: $-s_1(x_1 - x_2)$; $-s_2(x_2 - x_3)$ и сила инерции $-m_2\ddot{x}_2$. В результате получим второе уравнение:

$$m_2\ddot{x}_2 + s_2(x_2 - x_3) + s_1(x_1 - x_2) = 0.$$

Аналогично составляют третье уравнение:

$$m_3\ddot{x}_3 + s_3(x_3 - x_4) + s_2(x_2 - x_3) = 0.$$

При выводе четвертого уравнения к силам реакции, имеющим упругий характер, необходимо добавить силы вязкого трения газа в капиллярах пробки — $r\dot{x}_4$. В результате этого получим

$$m_1\ddot{x}_4 + s_3(x_3 - x_4) + r\dot{x}_4 = 0.$$

Метод Лагранжа. Для сложных колебательных систем удобно пользоваться уравнениями в обобщенных координатах. Напомним, что понимают под обобщенными координатами.

Материальные тела можно рассматривать как систему материальных точек. В случае, когда связи наложены только на координаты и выражаются уравнениями

$$f_j = f_j(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_n) \qquad (II.1.8)$$

($j = 1, 2, 3, \ldots, s$; n — число материальных точек, составляющих систему), из общего числа $3n$ координат, определяющих положение системы, независимыми оказываются $3n - s$. Остальные связаны уравнениями (II.1.8). Системы, подчиненные лишь геометрическим ограничениям, т. е. уравнениям, в которые входят только координаты, но не входят скорости перемещения точек, называют *голономными*. Радиусы-векторы точек голономной системы при стационарных связях могут выражаться через функции независимых переменных, которые называют *переменными Лагранжа*, или *обобщенными координатами*, q_1, q_2, $\ldots$, q_{3n-s}. Эти функции образуют n векторных уравнений

$$\mathbf{r}_\alpha = \mathbf{r}_\alpha(q_1, q_2, \ldots, q_{3n-s}), \qquad (II.1.9)$$

которые называют *уравнениями системы*. Большое значение для теоретических исследований имеет общее уравнение голономных систем с удерживающими и совершенными связями. При этом под *совершенными* понимают такие связи, для которых работа реакции сил на допустимых этими связями возможных малых перемещениях системы равна нулю. *Удерживающие*, или *двусторонние*, связи те, которые допускают перемещения как в одном, так и в противоположном направлениях.

Для указанных механических систем сумма работ сил реакций связей и даламберовых сил инерции на всех возможно малых перемещениях системы из любых положений, которые она занимает при действительном движении, равна нулю:

$$\sum_{i=1}^{n} [\mathbf{R}_i - (m\ddot{\mathbf{r}})]\, \delta\mathbf{r}_i = 0. \qquad (II.1.10)$$

Соотношение (II.1.10) есть *общее уравнение движения материальной системы с удерживающими совершенными связями*. Оно позволяет, если воспользоваться (II.1.9), вывести уравнения движения, соответствующие методу Лагранжа. С этой целью проведем преобразования (II.1.10) к обобщенным координатам q_1, q_2, $\ldots$, q_l. Для сокращения записей сумм условимся опускать знак суммирования во всех одночленах, множители которых имеют одинаковые индексы. Например, выражение $\sum A_iB_i = A_1B_1 + \ldots + A_lB_l$ согласно этому правилу будем записывать сокращенно, без явного знака суммирования:

A_iB_i. В сокращенной записи общее уравнение движения имеет вид

$$[\mathbf{R}_i - (m\ddot{\mathbf{r}})_i]\,\delta\mathbf{r}_i = 0. \qquad (II.1.11)$$

Если перейти в (II.1.11) к обобщенным координатам, то первые члены, выражающие работу сил связи, преобразовываются к формуле

$$\mathbf{R}_i\,\delta\mathbf{r}_i = \mathbf{R}_i\,\frac{\partial\mathbf{r}_i}{\partial q_k}\,\delta q_k = Q_k\,\delta q_k, \qquad (II.1.12)$$

где $Q_k = \mathbf{R}_i\,\dfrac{\partial\mathbf{r}_i}{\partial q_k}$ — обобщенная сила, соответствующая обобщенной координате q_k и созданная силами, приложенными к точкам системы.

Проведем преобразование суммы работ, выполняемых силами инерции:

$$-(m\ddot{\mathbf{r}})_i\,\delta\mathbf{r}_i = -(m\ddot{\mathbf{r}})_i\,\frac{\partial\mathbf{r}_i}{\partial q_k}\,\delta q_k = -\left\{\frac{d}{dt}\left[(m\dot{\mathbf{r}})_i\,\frac{\partial\mathbf{r}_i}{\partial q_k}\right] - (m\dot{\mathbf{r}})_i\,\frac{\partial\dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q_k}\right\}\delta q_k. \qquad (II.1.13)$$

Используя выражение кинетической энергии для всей системы

$$T = \frac{1}{2}\,(m_1\dot{r}_1^2 + m_2\dot{r}_2^2 + \ldots + m_l\dot{r}_l^2),$$

найдем от нее частные производные по обобщенной координате и обобщенной скорости:

$$\frac{\partial T}{\partial q_k} = m_1\dot{\mathbf{r}}_1\,\frac{\partial\dot{\mathbf{r}}_1}{\partial q_k} + m_2\dot{\mathbf{r}}_2\,\frac{\partial\dot{\mathbf{r}}_2}{\partial q_k} + \ldots = (m\dot{\mathbf{r}})_i\,\frac{\partial\dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q_k},$$

$$\frac{\partial}{\partial\dot{q}_k}\,T = m_1\dot{\mathbf{r}}_1\,\frac{\partial\dot{\mathbf{r}}_1}{\partial\dot{q}_k} + \ldots = (m\dot{\mathbf{r}})_i\,\frac{\partial\dot{\mathbf{r}}_i}{\partial\dot{q}_k}.$$

Используя очевидное равенство $\partial\dot{\mathbf{r}}_i/\partial\dot{q}_k = \partial\mathbf{r}_i/\partial q_k$, получим:

$$(m\dot{\mathbf{r}})_i\,\frac{\partial\dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q_k} = \frac{\partial T}{\partial q_k}, \quad (m\dot{\mathbf{r}})_i\,\frac{\partial\mathbf{r}_i}{\partial q_k} = \frac{\partial T}{\partial\dot{q}_k}. \qquad (II.1.14)$$

Сравнивая (II.1.14) с (II.1.13), выразим работу сил инерции в виде

$$-(m\ddot{\mathbf{r}})_i\,\delta\mathbf{r}_i = -\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_k}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_k}\right]. \qquad (II.1.15)$$

Используя (II.1.11) и (II.1.15) в формуле (II.1.10), запишем общее уравнение движения материальной системы в обобщенных координатах:

$$\sum_{k=1}^{l}\left\{Q_k - \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_k}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_k}\right]\right\}\delta q_k = 0. \qquad (II.1.16)$$

Вследствие того что перемещения q_k независимы, уравнение (II.1.16) разделяется на l уравнений:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_k}\right) - \frac{\partial T}{\partial\dot{q}_k} = Q_k \quad (k = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ l), \qquad (II.1.17)$$

которые называют *уравнениями Лагранжа второго рода*. Предполагая, что силы Q_k имеют потенциальный характер ($Q = -\partial U/\partial q_k$), и вводя еще отдельно силы вязкого трения $\varphi_k = -\partial W/\partial q_k$, выразим уравнения движения в виде общих уравнений Лагранжа второго рода:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial T}{\partial q} = -\frac{\partial U}{\partial q_k} - \frac{\partial W}{\partial \dot{q}_k} + F_k(t,\ q_i), \qquad (\text{II}.1.18)$$

где U — потенциальная энергия сил реакции и объемных сил; W — энергия рассеяния $[W(\dot{q})]$; $F_k(t,\ q_i)$ — внешние силы, приложенные к отдельным частям системы.

Энергия системы с двумя системами свободы. Для составления уравнений движения механической колебательной системы необходимо найти потенциальную, кинетическую энергии и функцию диссипации. Рассмотрим колебательную систему с двумя степенями свободы. Пусть уравнения системы известны и заданы функциями

$$x_1 = x_1(q_1,\ q_2), \quad x_2 = x_2(q_1,\ q_2).$$

Тогда полная кинетическая энергия системы $T = (m_1\dot{x}_1^2 + m_2\dot{x}_2^2)/2$ в обобщенных координатах получается путем следующих преобразований:

$$2T = m_1\left(\frac{\partial x_1}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial x_1}{\partial q_2}\dot{q}_2\right)^2 + m_2\left(\frac{\partial x_2}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial x_2}{\partial q_2}\dot{q}_2\right)^2 =$$
$$= \left[m_1\left(\frac{\partial x_1}{\partial q_1}\right)^2 + m_2\left(\frac{\partial x_2}{\partial q_1}\right)^2\right]\dot{q}_1^2 + \left[m_1\left(\frac{\partial x_1}{\partial q_2}\right)^2 + m_2\left(\frac{\partial x_2}{\partial q_2}\right)^2\right]\dot{q}_2^2 +$$
$$+ 2\left(m_1\frac{\partial x_1}{\partial q_1}\frac{\partial x_1}{\partial q_2} + m_2\frac{\partial x_2}{\partial q_1}\frac{\partial x_2}{\partial q_2}\right)\dot{q}_1\dot{q}_2 = \alpha_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k.$$

Здесь α_{ik} — функции обобщенных координат q_1 и q_2, которые можно представить в форме степенного ряда относительно приращений обобщенных координат от тех значений, которые они имели, когда система была в состоянии равновесия:

$$\alpha_{ik} = f(q_{01} + q_1,\ q_{02} + q_2) = f_0 + \left(\frac{\partial f}{\partial q_1}\right)_0 q_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial q_2}\right)_0 q_2 + \ldots$$

Ограничиваясь только первым членом разложения, получим

$$\alpha_{ik} = f_0 = a_{ik}.$$

Тогда кинетическая энергия колебательной системы с двумя степенями свободы выражается квадратичной формой:

$$T = \frac{1}{2}(a_{11}\dot{q}_1^2 + 2a_{12}\dot{q}_1\dot{q}_2 + a_{22}\dot{q}_2^2). \qquad (\text{II}.1.19)$$

Поскольку кинетическая энергия всегда положительна, то

$$a_{11} \geqslant 0,\ a_{22} \geqslant 0,\ a_{11}a_{22} - a_{12}^2 \geqslant 0. \qquad (\text{II}.1.20)$$

Для получения формулы потенциальной энергии как функции обобщения координат представим $U(q_1,\ q_2)$ в виде степенного ряда:

$$U(q_{01} + q_1,\ q_{02} + q_2) = U_{q_{01},\ q_{02}} + \left(\frac{\partial U}{\partial q_1}\right)_{q_{01},\ q_{02}} q_1 +$$
$$+ \left(\frac{\partial U}{\partial q_2}\right)_{q_{01},\ q_{02}} q_2 + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_1^2}\right)_{q_{01},\ q_{02}} q_1^2 +\right.$$
$$\left. + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_2^2}\right)_{q_{01},\ q_{02}} q_2^2 + 2\left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_1 \partial q_2}\right)_{q_{01},\ q_{02}} q_1 q_2\right] + \ldots \qquad (\text{II}.1.21)$$

Известно, что потенциальная энергия системы, находящейся в положении равновесия, имеет минимальное значение. Положим это значение равным нулю: $U_{q_{01},\,q_{02}}=0$. По условию минимума функции, первые частные производные от потенциальной энергии по обобщенным координатам при q_{01}, q_{02} равны нулю:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial q_1}\right)_{q_{01},\,q_{02}}=\left(\frac{\partial U}{\partial q_2}\right)_{q_{01},\,q_{02}}=0.$$

Отсюда следует: если отбросить в (II.1.21) слагаемые выше второй степени, то получим выражение для потенциальной энергии системы в виде квадратичной функции обобщенных координат:

$$U(q_1,\ q_2)=\frac{1}{2}(s_{11}q_1^2+2s_{12}q_1q_2+s_{22}q_2^2). \tag{II.1.22}$$

Точно так же энергию диссипации $W(\dot{q}_1,\ \dot{q}_2)$ можно представить в виде степенного ряда и, ограничиваясь вторыми степенями, получить с точностью до постоянной:

$$W(\dot{q}_1,\ \dot{q}_2)=\frac{1}{2}(b_{11}\dot{q}_1^2+2b_{12}\dot{q}_1\dot{q}_2+b_{22}\dot{q}_2^2). \tag{II.1.23}$$

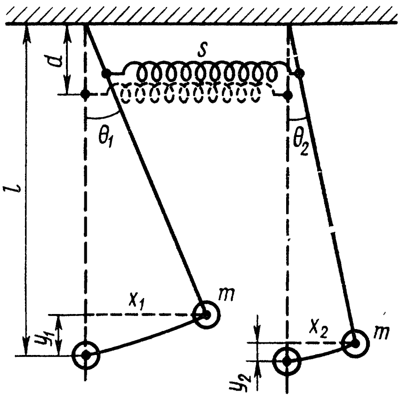

Рис. II.1.2

Квадратичные формы (II.1.22) и (II.1.23) положительны, а потому их коэффициенты удовлетворяют неравенствам типа (II.1.20):

$$\begin{aligned}&s_{11}\geqslant 0,\ \ s_{12}\geqslant 0,\ \ s_{11}s_{22}-s_{12}^2\geqslant 0,\\&b_{11}\geqslant 0,\ \ b_{22}\geqslant 0,\ \ b_{11}b_{22}-b_{12}^2\geqslant 0.\end{aligned} \tag{II.1.20$'$}$$

Собственные колебания системы с двумя степенями свободы. Подставляя (II.1.19) и (II.1.22) в уравнения Лагранжа второго рода (II.1.18) и положив $W(\dot{q}_i)$ и $F(t,\ q_i)$ равными нулю, а $k=1,\ 2$, получим систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}&a_{11}\ddot{q}_1+a_{12}\ddot{q}_2+s_{11}q_1+s_{12}q_2=0,\\&a_{22}\ddot{q}_2+a_{12}\ddot{q}_1+s_{22}q_{22}+s_{12}q_1=0.\end{aligned} \tag{II.1.24}$$

В качестве типичных примеров систем с двумя степенями свободы приведем механическую систему, представляющую два физических маятника, связанных упругой пружиной (рис. II.1.2), и электрическую, состоящую из двух LC-контуров, связанных общей электрической емкостью C_{12} (рис. II.1.3).

В качестве обобщенных координат механической системы можно взять углы отклонения θ_1 и θ_2 маятников от положения равновесия, а в электрической схеме — электрические заряды на любых двух конденсаторах.

Парциальной системой одной степени свободы называют такую, которая получается из системы с двумя степенями свободы при закреплении одной из обобщенных координат. В электрической системе — это колебательный контур, который получается из всей схемы, когда осуществлен разрыв цепи одного из контуров.

Уравнение первой парциальной механической системы получится из (II.1.18) при $q_2=0$:

$$\ddot{q}_1+\frac{s_{11}}{a_{11}}q_1=0.$$

Видно, что собственная частота первой парциальной системы равна $n_1=\sqrt{s_{11}/a_{11}}$. Точно так же можно установить, что парциальная частота второй парциальной системы равна $n_2=\sqrt{s_{22}/a_{22}}$.

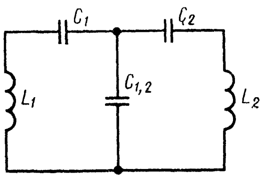

Рис. II.1.3

Допустим, что решения (II.1.18) имеют вид

$$q_1=A\cos(\omega t+\alpha),\quad q_2=B\cos(\omega t+\alpha),\tag{II.1.25}$$

где A, B, ω, α — постоянные, определяемые из начальных условий.

Решение типа (II.1.25) называют *нормальным колебанием*, а ω — *частотой нормальных колебаний*. Подставляя (II.1.25) в (II.1.24), получим

$$\left.\begin{aligned}-a_{11}\omega^2A-a_{12}\omega^2B+s_{11}A+s_{12}B&=0,\\-a_{22}\omega^2B-a_{12}\omega^2A+s_{22}B+s_{12}A&=0,\end{aligned}\right\}$$

или

$$\left.\begin{aligned}(s_{11}-a_{12}\omega^2)A+(s_{12}-a_{12}\omega^2)B&=0,\\(s_{12}-a_{12}\omega^2)A+(s_{22}-a_{22}\omega^2)B&=0.\end{aligned}\right\}\tag{II.1.26}$$

Условие совместимости однородных уравнений (II.1.26) позволяет записать характеристическое уравнение частот:

$$\begin{vmatrix}s_{11}-a_{11}\omega^2 & s_{12}-a_{12}\omega^2\\ s_{12}-a_{12}\omega^2 & s_{22}-a_{22}\omega^2\end{vmatrix}=0.\tag{II.1.27}$$

Раскрывая определитель (II.1.27) и обозначая $\omega^2=\zeta$, найдем характеристическое уравнение в виде

$$\lambda_1\zeta^2+\lambda_2\zeta+\lambda_3=0,\tag{II.1.28}$$

где $\lambda_1=a_{11}a_{22}-a_{12}^2$, $\lambda_2=2a_{12}s_{12}-a_{22}s_{11}-a_{11}s_{22}$, $\lambda_3=s_{11}s_{22}-s_{12}^2$.

Обозначим левую часть уравнения (II.1.28) в виде функции $F(\zeta)=\lambda_1\zeta^2+\lambda_2\zeta+\lambda_3$, представляющей собой уравнение параболы. Корни (II.1.28) являются координатами точек пересечения этой параболы с осью ζ.

Согласно (II.1.20) и (II.1.20′), $\lambda_1>0$ и $\lambda_3>0$, поэтому функция $F(\zeta)$ при низких и при высоких частотах положительна. Таким образом, парабола $F(\zeta)$ имеет свои ветви, направленные вверх (рис. II.1.4).

Если ζ равно квадрату собственной частоты первой парциальной системы, т. е. $\zeta = s_{11}/a_{11} = n_1^2$, то $F(n_1^2) = -[a_{12}s_{11}/a_{11} - s_{12}]^2 < 0$. Точно так же получим

$$F(n_2^2) = -\left[a_{12}\frac{s_{22}}{a_{22}} - s_{12}\right]^2 < 0.$$

Отсюда следует, что собственные частоты парциальных систем расположены между частотами нормальных колебаний:

$$\omega_1^2 \leqslant n_1^2 \leqslant n_2 \leqslant \omega_2^2.$$

Определив значения ω_1 и ω_2 из уравнения частот, находим два значения $B/A = K$:

$$K_1 = -\frac{s_{11} - a_{11}\omega_1^2}{s_{12} - a_{12}\omega_1^2} = -\frac{s_{12} - a_{12}\omega_1^2}{s_{22} - a_{22}\omega_1^2},$$
$$K_2 = -\frac{s_{11} - a_{11}\omega_2^2}{s_{12} - a_{12}\omega_2^2} = -\frac{s_{12} - a_{12}\omega_2^2}{s_{22} - a_{22}\omega_2^2}, \qquad \text{(II.1.29)}$$

где K_1 и K_2 — отношение амплитуд в каждом из нормальных колебаний, характеризующее формы этих колебаний.

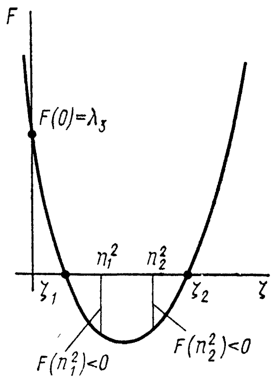

Рис. II.1.4

Из (II.1.29) следует, что форма колебаний не зависит от начальных условий и от частоты колебаний, а определяется только параметрами системы.

Запишем выражения для колебаний с частотами ω_1 и ω_2:

$$q_1^{(1)} = A_1^{(1)}\cos(\omega_1 t + \alpha_1),$$
$$q_1^{(2)} = A_1^{(2)}\cos(\omega_2 t + \alpha_2),$$
$$q_2^{(1)} = K_1 A_1^{(1)}\cos(\omega_1 t + \alpha_1),$$
$$q_2^{(2)} = K_2 A_1^{(2)}\cos(\omega_2 t + \alpha_2).$$

Подчеркнем следующие важные свойства системы с двумя степенями свободы:

если система совершает одно из нормальных колебаний, то обе обобщенные координаты q_1 и q_2 совершают колебания по гармоническому закону;

в каждом из нормальных колебаний амплитуды находятся в постоянном отношении K_1 или K_2, которое не зависит от начальных условий.

Общее решение системы уравнений получим путем суммирования частных решений.

$$q_1 = q_1^{(1)} + q_1^{(2)} = A_1^{(1)}\cos(\omega_1 t + \alpha_1) + A_1^{(2)}\cos(\omega_2 t + \alpha_2), \qquad \text{(II.1.30)}$$
$$q_2 = q_2^{(1)} + q_2^{(2)} = K_1 A_1^{(1)}\cos(\omega_1 t + \alpha_1) + K_2 A_1^{(2)}\cos(\omega_2 t + \alpha_2),$$

где $A_1^{(1)}$, $A_2^{(2)}$, α_1 и α_2 определяют из начальных условий:

$$q_1 = q_{10},\quad \dot q_1 = \dot q_{10},\quad q_2 = q_{20},\quad \dot q_2 = \dot q_{20} \text{ при } t = 0. \qquad \text{(II.1.31)}$$

Из общего решения (II.1.30) следует, что результирующее колебание системы с двумя степенями свободы не является гармоническим.

Пример. Два маятника одинаковой длины связаны пружиной, упругость которой s. Пружина прикреплена к маятникам в точках на расстоянии d от точек подвеса (см. рис.II.1.2). Массы маятников равны. Определить собственные частоты малых колебаний и закон движения системы.

Решение. Обозначим физические координаты маятников x_1, y_1 и x_2, y_2. Тогда кинетическая энергия системы равна

$$\frac{1}{2} m (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2} m (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2),$$

а потенциальная

$$mgy_1 + mgy_2.$$

Выберем в качестве обобщенных координат углы θ_1 и θ_2. Тогда уравнения системы имеют вид:

$$x_1 = l \sin\theta_1 \approx l\theta_1, \quad x_2 = l \sin\theta_2 \approx l\theta_2,$$

$$y_1 = l - l\sin\theta_1 = 2l \sin^2\frac{\theta_1}{2} \approx \frac{1}{2} l\theta_1^2,$$

$$y_2 = l - l\sin\theta_2 = 2l \sin^2\frac{\theta_2}{2} \approx \frac{1}{2} l\theta_2^2.$$

Кроме того, координаты концов пружины:

$$x_{d1} = d\sin\theta_1 \approx \theta_1 d, \quad x_{d2} = d\sin\theta_2 \approx \theta_2 d.$$

Тогда кинетическая энергия в обобщенных координатах θ_1 и θ_2 с точностью до членов 2-го порядка выражается формулой

$$T = \frac{1}{2} m (l^2\dot{\theta}_1^2 + l^2\theta_1^2\dot{\theta}_1^2) + \frac{1}{2} m (l^2\dot{\theta}_2^2 + l^2\theta_2^2\dot{\theta}_2^2) \approx \frac{1}{2} ml^2 (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2),$$

а потенциальная — формулой

$$U \approx mg\frac{l}{2} (\theta_1^2 + \theta_2^2) + \frac{1}{2} s (\theta_2 - \theta_1)^2 d^2 = \left(mg\frac{l}{2} + s\frac{d^2}{2}\right)\theta_1^2 + \frac{1}{2} (mgl + sd^2)\theta_2^2 - sd^2\theta_1\theta_2.$$

Подставляя эти формулы в уравнения Лагранжа второго рода, находим следующие уравнения движения связанных маятников:

$$ml^2\ddot{\theta}_1 + (mgl + s d^2)\theta_1 - s d^2\theta_2 = 0,$$

$$ml^2\ddot{\theta}_2 + (mgl + s d^2)\theta_2 - s d^2\theta_1 = 0.$$

Полагая решение уравнений в форме нормальных колебаний

$$\theta_1 = \theta_{01}\cos(\omega t + \alpha_1), \quad \theta_2 = \theta_{02}\cos(\omega t + \alpha_2),$$

найдем характеристическое уравнение

$$(mgl + s d^2 - ml^2\omega^2)^2 - s^2d^4 = 0,$$

откуда получаем выражения для нормальных частот связанных маятников: $\omega_2^2 = \frac{g}{l} + \frac{2s d^2}{ml^2}$, $\omega_1^2 = \frac{g}{l}$.

Зная ω_1 и ω_2, находим:

$$\theta_1 = \theta_{01}^{(1)}\cos(\omega_1 t + \alpha_1) + \theta_{01}^{(2)}\cos(\omega_2 t + \alpha_2),$$

$$\theta_2 = \theta_{02}^{(1)}\cos(\omega_1 t + \alpha_1) + \theta_{02}^{(2)}\cos(\omega_2 t + \alpha_2).$$

Или, введя коэффициенты распределения $K_1 = \theta_{01}^{(2)}/\theta_{01}^{(1)}$, $K_2 = \theta_{02}^{(2)}/\theta_{01}^{(1)}$, запишем решение в виде

$$\theta_1 = \theta_{01}^{(1)}\cos(\omega_1 t + \alpha_1) + \theta_{01}^{(2)}\cos(\omega_2 t + \alpha_2),$$

$$\theta_2 = K_1\theta_{01}^{(1)}\cos(\omega_1 t + \alpha_1) + K_2\theta_{01}^{(2)}\cos(\omega_2 t + \alpha_2).$$

Подставляя найденные выражения для частот нормальных колебаний в (II.1.26) или (II.1.29), получим:

$$K_1 = +1, \quad K_2 = -1,$$

$$\theta_1 = \theta_{01}^{(1)}\cos(\omega_1 t + \alpha_1) + \theta_{01}^{(2)}\cos(\omega_2 t + \alpha_2),$$

$$\theta_1 = \theta_{01}^{(1)}\cos(\omega_1 t + \alpha_1) - \theta_{01}^{(2)}\cos(\omega_2 t + \alpha_2).$$

Для нахождения $\theta_{01}^{(1)}$ и $\theta_{01}^{(2)}$ воспользуемся начальными условиями. Пусть при $t=0$

$$\theta_1=\varphi_1,\quad \theta_2=0,\quad \dot\theta_1=0,\quad \dot\theta_2=0.$$

Тогда

$$\varphi_1=\theta_{01}^{(1)}\cos\alpha_1+\theta_{02}^{(1)}\cos\alpha_2,$$
$$0=\theta_{01}^{(1)}\cos\alpha_1-\theta_{02}^{(1)}\cos\alpha_2,$$
$$0=-\theta_{01}^{(1)}\omega_1\cos\alpha_1-\theta_{02}^{(2)}\omega_2\cos\alpha_2,$$
$$0=-\theta_{01}^{(1)}\omega_1\cos\alpha_1+\theta_{02}^{(2)}\omega_2\cos\alpha_2.$$

Решая систему уравнений, находим $\theta_{01}^{(1)}$, $\theta_{02}^{(2)}$, α_1, α_2. В результате получим: $\alpha_1=\alpha_2=\pi/2$, $\theta_{01}^{(1)}=\theta_{02}^{(1)}=\theta_0/2$,

$$\theta_1=\theta_0\sin\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t\cos\frac{\omega_2-\omega_1}{2}t, \tag{II.1.32}$$
$$\theta_2=\theta_0\cos\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t\sin\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t.$$

Явление биений. Результат рассмотренного примера сводится к тому, что колебания каждого маятника негармоничны, но если разность частот ε нормальных колебаний невелика, т. е. $\varepsilon/\omega_1=(\omega_2-\omega_1)/\omega_1\ll 1$, то колебания каждой из парциальных частей (как первого, так и второго маятников) будут иметь характер почти гармонических колебаний, но с амплитудой, периодически изменяющейся с течением времени. Решение (II.1.32) в этом случае преобразуется к виду

$$\theta_1=\theta_0\cos\frac{\varepsilon}{2}t\sin\omega_1 t,\quad \theta_2=\theta_0\sin\frac{\varepsilon}{2}t\cos\omega_1 t.$$

причем $\varepsilon/2$ — круговая частота изменения амплитуды, равная $(\omega_2-\omega_1)/2$.

Энергия колебаний первого и второго маятников:

$$T_1+U_1=\frac{1}{2}ml^2\dot\theta_1^2\approx\frac{1}{2}ml^2\omega_1^2\theta_{01}^2\cos^2\frac{\varepsilon}{2}t\cos^2\omega_1 t=$$
$$=\left(\frac{1}{4}ml^2\omega_1^2\theta_{01}^2+\frac{1}{4}ml^2\omega_1^2\theta_{01}^2\cos\varepsilon t\right)\cos^2\omega_1 t,$$
$$T_2+U_2=\left(\frac{1}{4}ml^2\omega_1^2\theta_{01}^2-\frac{1}{4}ml^2\omega_1^2\theta_{01}^2\cos\varepsilon t\right)\cos^2\omega_1 t.$$

В момент времени, когда энергия колебаний первого маятника максимальна, энергия второго будет равна нулю. Пусть этот момент времени равен нулю. При $\tau/2=\pi/\varepsilon$ энергия первого маятника станет равной нулю, а второго — максимальной. Таким образом, за время, равное $\tau/2=\pi/\varepsilon$, энергия от первого маятника передается ко второму. Спустя время (π/ε) энергия от второго маятника перейдет полностью к первому. За полный период, равный $\tau=2\pi/\varepsilon=2\pi/(\omega_2-\omega_1)$, передача энергии от одной парциальной системы к другой полностью будет завершена. Здесь мы имеем дело с периодическими изменениями энергии связанных колебаний близких частот, называемыми *биениями*. Величину $\varepsilon=\omega_2-\omega_1$ называют *круговой частотой биений*, а $\tau=2\pi/\omega_2-\omega_1$ — *периодом биений*.

В данном примере

$$\varepsilon=\omega_2-\omega_1=\sqrt{\frac{g}{l}+\frac{2s\,d^2}{ml^2}}-\sqrt{\frac{g}{l}}\approx\sqrt{\frac{g}{l}}\left(1+\frac{s\,d^2}{gml}-1\right)=\frac{sd^2}{gml}\sqrt{\frac{g}{l}}.$$

Условием того, что биение еще реализуется, является выполнение неравенства

$$\frac{\omega_2-\omega_1}{\omega_2}=\frac{s\,d^2}{mgl}\ll 1.$$

Явление биений (общий случай). Допустим, что колебательная система с двумя степенями свободы имеет очень близкие частоты собственных колебаний $\omega_2=\omega_1+\varepsilon$, $\varepsilon/\omega_1 \ll 1$). В этом случае колебания можно записать в виде следующих соотношений:

$$\begin{aligned} q_1 &= q_{01}^{(1)}\cos(\omega_1 t+\alpha_1)+q_{01}^{(2)}\cos[(\omega_1+\varepsilon)t+\alpha_2], \\ q_2 &= q_{01}^{(1)}K_1\cos(\omega_1 t+\alpha_1)+q_{01}^{(2)}K_2\cos[(\omega_1+\varepsilon)t+\alpha_2]. \end{aligned} \qquad (\text{II}.1.33)$$

Путем геометрического сложения вращающихся векторов (рис. II.1.5) найдем: $\gamma_1=\omega_1 t+\alpha_1$, $\gamma_2=(\omega_1+\varepsilon)t+\alpha_2$, $\gamma\approx(\omega_2+\varepsilon/2)\,t+\beta_1\approx$ $\approx\omega_1 t+\beta_1]$ и $q_1=A_1(t)\cos(\omega_1 t+\beta_1)$, $q_2=A_2(t)\cos(\omega_1 t+\beta_2)$, (II.1.34), где A_1 и A_2 — амплитуды колебаний парциальных частей системы:

$$\begin{aligned} A_1^2(t) &= (q_{01}^{(1)})^2+(q_{01}^{(2)})^2+2q_{01}^{(1)}q_{01}^{(2)}\cos(\varepsilon t+\alpha_2-\alpha_1), \\ A_1^2(t) &= (q_{01}^{(1)}K_1)^2+(q_{01}^{2}K_2)^2+(2q_{01}^{(1)}q_{01}^{(2)}K_1K_2)\cos(\varepsilon t+\alpha_2-\alpha_1). \end{aligned} \qquad (\text{II}.1.35)$$

Энергии колебаний парциальных частей системы пропорциональны квадратам амплитуд (II.1.35) и изменяются с течением времени по гармоническому закону с круговой частотой $\varepsilon=\omega_2-\omega_1$. За время, равное $\tau/2=\pi/\varepsilon$, энергия первой части системы изменится от $(q_{01}^{(1)}-q_{01}^{(2)})^2$ до $(q_{01}^{(1)}+q_{01}^{(2)})^2$, а энергия второй части системы — от величины, пропорциональной $(q_{01}^{(1)}K_1-q_{01}^{(2)}K_2)^2$, до $(q_{01}^{(1)}K_1+$ $+q_{01}^{(2)}K_2)^2$, причем полный цикл изменения завершится за время $\tau=2\pi/\varepsilon$. Фазы колебаний энергии парциальных частей сдвинуты так, что энергия колебаний периодически переходит от одной части системы к другой.

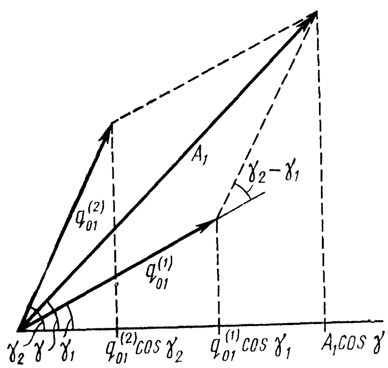

Рис. II.1.5

Главные координаты системы. Выбор обобщенных координат произволен. Однако среди всех возможных систем координат, которые могут быть приняты для решения задачи, можно найти такую систему обобщенных координат η_1 и η_2, которая позволит записать кинетическую и потенциальную энергии в виде выражений, содержащих только квадраты скоростей и координат:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}(a_1\dot{\eta}_1^2+a_2\dot{\eta}_2^2), \\ U &= \frac{1}{2}(s_1\eta_1^2+s_2\eta_2^2). \end{aligned} \qquad (\text{II}.1.36)$$

Указанную систему координат называют *главной.*

Можно показать, что между произвольными q_1 и q_2 и главными η_1 и η_2 координатами существуют следующие соотношения:

$$q_1=\eta_1+\eta_2, \quad q_2=K_1\eta_1+K_2\eta_2, \qquad (\text{II}.1.37)$$

где K_1 и K_2 — коэффициенты распределения.

При этом параметры системы в главных координатах выражают формулами:

$$a_1 = a_{11} + 2a_{12}K_1 + a_{22}K_1^2, \quad a_2 = a_{11} + 2a_{12}K_2 + a_{22}K_2^2,$$
$$s_1 = s_{11} + 2s_{12}K_1 + s_{22}K_1^2, \tag{II.1.38}$$
$$s_2 = s_{11} + 2s_{12}K_2 + s_{22}K_2^2.$$

Дифференциальные уравнения колебаний системы с двумя степенями свободы в главных координатах имеют вид двух независимых уравнений второго порядка:

$$a_1\ddot{\eta}_1 + s_1\eta_1 = 0, \quad a_2\ddot{\eta}_2 + s_2\eta_2 = 0. \tag{II.1.39}$$

Решениями этих уравнений являются формулы для нормальных колебаний:

$$\eta_1 = C_1 \cos(\omega_1 t + \beta_1), \quad \eta_2 = C_2 \cos(\omega_2 t + \beta_2), \tag{II.1.40}$$

где C_1, C_2, β_1 и β_2 — постоянные, определяемые из начальных условий

$$\eta_1 = \eta_{10}, \ \dot{\eta}_1 = \dot{\eta}_{10}, \ \eta_2 = \eta_{20}, \ \dot{\eta}_2 = \dot{\eta}_{20} \quad \text{при } t = 0. \tag{II.1.41}$$

Собственные частоты колебаний системы в главных координатах выражают формулами:

$$\omega_1 = \sqrt{s_1/a_1}, \quad \omega_2 = \sqrt{s_2/a_2}. \tag{II.1.42}$$

Частоты главных колебаний ω_1 и ω_2 не зависят от системы координат, которая выбрана для расчетов, поэтому (II.1.42) совпадает с теми значениями частот, которые получают при решении характеристического уравнения (II.1.28).

Решение (II.1.40) показывает, что каждая главная координата η_1 или η_2 подчинена гармоническому закону колебаний с частотой, равной одной из главных частот системы ω_1 или ω_2.

Введение главных координат, несмотря на сравнительную простоту формул для колебательной системы, практических выгод в проведении расчета колебательных систем не дает. Однако понятие о главных координатах имеет большое теоретическое значение, особенно при изучении вынужденных колебаний системы.

Нахождение главных координат сводят к следующему: выбирают обобщенные координаты, стараясь взять такие, в которых наиболее просто выражаются кинетическая и потенциальная энергии системы; находят параметры системы в этих обобщенных координатах; по формулам (II.1.29) и (II.1.38) вычисляют коэффициенты распределения K_1, K_2 и параметры системы относительно главных координат; наконец, по формулам (II.1.37) находят главные координаты.

Затухающие колебания системы с двумя степенями свободы. Пусть на механическую колебательную систему с двумя степенями свободы наряду с консервативными силами действуют силы сопротивления, пропорциональные скорости. Требуется найти зависимость координат этой системы от времени.

В качестве обобщенных координат системы используем главные координаты η_1 и η_2. Тогда в выражения кинетической и потенциальной энергий не войдут члены, содержащие произведения обобщенных скоростей и обобщенных координатах. При этом

$$T=\frac{1}{2}(a_1\dot{\eta}_1^2+a_2\dot{\eta}_2^2), \quad U=\frac{1}{2}(s_1\eta_1^2+s_2\eta_2^2).$$

Для характеристики сил сопротивления введем диссипативную функцию, или функцию рассеивания, которая для малых колебаний может быть представлена в виде однородной квадратичной формы обобщенных скоростей:

$$W=\frac{1}{2}(b_1\dot{\eta}_1^2+2h\dot{\eta}_1\dot{\eta}_2+b_2\dot{\eta}_2^2). \tag{II.1.43}$$

Запишем уравнения Лагранжа второго рода для данной механической системы:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{\eta}_1}\right)-\frac{\partial T}{\partial\eta_1}&=-\frac{\partial U}{\partial\eta_1}-\frac{\partial W}{\partial\dot{\eta}_1},\\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{\eta}_2}\right)-\frac{\partial T}{\partial\eta_2}&=-\frac{\partial U}{\partial\eta_2}-\frac{\partial W}{\partial\dot{\eta}_2}. \end{aligned} \tag{II.1.44}$$

Подставляя в эти уравнения выражения для кинетической и потенциальной энергий и учитывая диссипативную функцию (II.1.43), получим уравнения движения системы:

$$\begin{aligned} a_1\ddot{\eta}_1+b_1\dot{\eta}_1+h\dot{\eta}_2+s_1\eta_1&=0,\\ a_2\ddot{\eta}_2+h\dot{\eta}_1+b_2\dot{\eta}_2+s_2\eta_2&=0. \end{aligned} \tag{II.1.45}$$

Решения этих уравнений будем искать в форме экспоненциальных функций:

$$\eta_1=C_1e^{\beta t}, \quad \eta_2=C_2e^{\beta t}. \tag{II.1.46}$$

Подставляя (II.1.46) в (II.1.45), получим:

$$\begin{aligned} C_1(a_1\beta^2+b_1\beta+s_1)+C_2h\beta&=0,\\ C_1h\beta+C_2(a_2\beta^2+b_2\beta+s_2)&=0. \end{aligned} \tag{II.1.47}$$

Условием совместимости этих уравнений является равенство нулю главного определителя:

$$\begin{vmatrix} a_1\beta^2+b_2\beta+s_1 & h\beta \\ h\beta & a_2\beta^2+b_2\beta+s_2 \end{vmatrix}=0. \tag{II.1.48}$$

Вследствие того что T, U и W выражают положительными и знакоопределенными квадратичными формами, параметры системы удовлетворяют следующим неравенствам:

$$a_1>0,\ a_2>0,\ s_1>0,\ s_2>0,\ b_1b_2-h^2>0,$$

из которых следует, что коэффициенты характеристического уравнения (II.1.47) положительны. Это уравнение четвертой степени. Его решение состоит из четырех корней, попарно сопряженных.

Движение системы осуществляется с рассеянием энергии, а потому координаты η_1 и η_2 должны убывать с течением времени. Из этого следует, что вещественные части решений должны быть меньше нуля, и комплексные величины β выражаются формулами:

$$\begin{aligned} \beta_1 &= -\delta_1 + j\omega_1, \quad \beta_1^* = -\delta_1 - j\omega_1, \\ \beta_2 &= -\delta_2 + j\omega_2, \quad \beta_2^* = -\delta_2 - j\omega_2, \end{aligned} \tag{II.1.49}$$

где δ_1 и δ_2 положительны.

Каждому корню β_1, β_1^*; β_2, β_2^* соответствуют два частных решения:

$$\eta_{11} = C_{11}e^{\beta_1 t}, \quad \eta_{11}^* = C_{11}^* e^{\beta_1^* t},$$
$$\eta_{21} = C_{21}e^{\beta_1 t}, \quad \eta_{21}^* = C_{21}^* e^{\beta_1^* t},$$
$$\eta_{12} = C_{12}e^{\beta_2 t}, \quad \eta_{22} = C_{12}e^{\beta_2 t}, \quad \eta_{12}^* = C_{12}^* e^{\beta_2^* t}, \quad \eta_{22}^* = C^x e^{\beta_2^* t}.$$

Выделяя реальную часть этих комплексных функций, находим общее решение для первой и второй главных координат:

$$\begin{aligned} \eta_1 &= e^{-\delta_1 t}(A_1^{(1)} \cos \bar\omega_1 t + B_1^{(1)} \sin \bar\omega_1 t) + \\ &+ e^{-\delta_2 t}(A_1^{(2)} \cos \bar\omega_2 t + B_1^{(2)} \sin \bar\omega_2 t), \\ \eta_2 &= e^{-\delta_1 t}(A_2^{(1)} \cos \bar\omega_1 t + B_2^{(1)} \sin \bar\omega_1 t) + \\ &+ e^{-\delta_2 t}(A_2^{(2)} \cos \bar\omega_2 t - B_2^{(2)} \sin \bar\omega_2 t), \end{aligned} \tag{II.1.50}$$

где $\bar\omega_1 = \sqrt{\omega_1^2 - \delta_1^2}$, $\bar\omega_2 = \sqrt{\omega_2^2 - \delta_2^2}$, $\bar\omega_1$ и $\bar\omega_2$ — главные частоты системы.

В общем случае, как это видно из (II.1.50), колебание каждой координаты (η_1 или η_2) состоит из наложения двух затухающих колебаний, соответствующих своим частотам и коэффициентам затухания.

Вынужденные колебания механической системы с двумя степенями свободы. Если система с двумя степенями свободы находится под действием внешних сил, то колебания будут состоять из наложения, свободных затухающих колебаний и вынужденных. С течением времени свободные колебания полностью затухнут и система войдет в режим установившихся колебаний.

Рассмотрим вынужденные установившиеся колебания.

Математическое решение задачи сводят к случаю отыскания решения системы уравнений второго порядка с правой частью. Для системы с двумя степенями свободы ими будут уравнения Лагранжа, когда их правые части соответственно равны обобщенным внешним силам.

Когда в качестве обобщенных координат системы взяты главные координаты η_1 и η_2, система дифференциальных уравнений имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} a_1\ddot\eta_1 + b_1\dot\eta_1 + h\dot\eta_2 + s_1\eta_1 &= F_1(t), \\ a_2\ddot\eta_2 + h\dot\eta_1 + b_2\dot\eta_2 + s_2\eta_2 &= F_2(t). \end{aligned} \tag{II.1.51}$$

Рассмотрим случай, когда обобщенные силы — гармонические функции времени:

$$\begin{aligned} F_1(t) &= A_1 \cos(pt + \alpha), \\ F_2(t) &= A_2 \cos(pt + \alpha) \end{aligned} \tag{II.1.52}$$

и найдем решение (II.1.51) для установившихся колебаний, т. е. частное решение системы уравнений. Будем искать его в виде реальных частей функций комплексного аргумента:

$$\tilde{\eta}_1 = \tilde{\eta}_{1в} e^{jpt}, \quad \tilde{\eta}_2 = \tilde{\eta}_{2в} e^{jpt}, \tag{II.1.53}$$

где $\tilde{\eta}_{1в}$ и $\tilde{\eta}_{2в}$ — комплексные амплитуды вынужденных колебаний.

Подставляя (II.1.53) в (II.1.52), предварительно представив обобщенные силы в виде функций $\tilde{F}_1(t) = \tilde{A}_1 e^{jpt}$, $\tilde{F}_2(t) = \tilde{A}_2 e^{jpt}$, получим:

$$\begin{aligned} (-a_1p^2 + jpb_1 + s_1)\,\tilde{\eta}_{1в} + jph\tilde{\eta}_{2в} &= \tilde{A}_1, \\ (-a_2p^2 + jpb_2 + s_2)\,\tilde{\eta}_{2в} + jph\tilde{\eta}_{1в} &= \tilde{A}_2. \end{aligned} \tag{II.1.54}$$

Решив эту систему уравнений, найдем формулы для вычисления комплексных амплитуд вынужденных колебаний:

$$\begin{aligned} \tilde{\eta}_{1в} &= \frac{(-a_2p^2 + jb_2p + s_2)\,\tilde{A}_1 - jhp\tilde{A}_2}{(-a_1p^2 + jb_1p + s_1)(-a_2p^2 + jb_2p + s_2) - h^2p^2}, \\ \tilde{\eta}_{2в} &= \frac{(-a_1p^2 + jb_1p + s_1)\,\tilde{A}_2 - jhp\tilde{A}_1}{(-a_1p^2 + jb_1p + s_1)(-a_2p^2 + jb_2p + s_2) - h^2p^2}. \end{aligned} \tag{II.1.55}$$

В частности, для случая, когда частота вынужденных колебаний совпадает с одной из резонансных, например $p^2 = \omega_1^2 = s_1/a_1$, возникает явление резонанса одного из колебаний и формулы (II.1.55) примут следующий вид:

$$\begin{aligned} \tilde{\eta}_{1в} &= \frac{jb_2p\tilde{A}_1 - jhp\tilde{A}_2}{jb_1p\,(-a_2p^2 + jb_2p + s_2)}, \\ \tilde{\eta}_{2в} &= \frac{\tilde{A}_2 jb_1p - jhp\tilde{A}_1}{jb_1p\,(-a_2p^2 + jb_2p + s_2)}. \end{aligned} \tag{II.1.56}$$

Если система не содержит взаимозависимых сил трения, так что в формуле функции рассеяния (диссипации) $h = 0$, то

$$\begin{aligned} \tilde{\eta}_{1в} &= \frac{\tilde{A}_1 jb_2p}{jb_1p\,(-a_2p^2 + jb_2p + s_2)}, \\ \tilde{\eta}_{2в} &= \frac{\tilde{A}_2 jb_1p}{jb_1p\,(-a_2p^2 + jb_2p + s_2)}. \end{aligned} \tag{II.1.57}$$

Формулы (II.1.57) позволяют сделать расчет устройства, которое в механике называют гасителем колебаний. Эта система с двумя степенями свободы, причем на первую координату η_1 действует сила, частота которой равна первой собственной частоте, а на вторую внешняя сила не действует. Тогда по (II.1.57)

$$\tilde{\eta}_{1в} = \frac{b_2p\tilde{A}_1}{b_1p\,(-a_2p^2 + jb_2p + s_2)}, \quad \tilde{\eta}_{2в} = 0. \tag{II.1.58}$$

Это значит, что данное устройство обладает свойством не пропускать на вторую координату действия сил, приложенных к координате η_1, если частота действующей силы равна первой частоте собственных колебаний системы.

Примерами таких систем являются двойной амортизатор, радиотехнический фильтр-пробка, успокоитель качки корабля и т. д.

В заключение заметим, что для получения окончательных формул вынужденных колебаний выражения (II.1.55) – (II.1.58) надо преобразовать к виду, содержащему модуль и фазовый множитель комплексной функции, по известным правилам преобразования комплексных чисел и оставить только вещественную часть этой функции. Например, по (II.1.58)

$$\tilde{\eta}_1 = \frac{\tilde{A}_1 b_2 p}{b_1 p\,(-a_2 p^2 + j b_2 p + s_2)} = \frac{b_2 p A_1 e^{j\alpha}}{b_1 p \sqrt{(s_2 - a_2 p^2)^2 + (b_2 p)^2}\, e^{+j\beta}} =$$

$$= A_1 \frac{b_2}{b_1} \frac{1}{\sqrt{(s_2 - a_2 p^2)^2 + b_2^2 p^2}}\, e^{j(\alpha - \beta)},$$

где α — начальная фаза внешней силы; $\beta = \operatorname{arctg} \dfrac{b_2 p}{s_2 - a_2 p^2}$.

Вещественная часть решения имеет вид

$$\eta_1 = A_1 \frac{b_2}{b_1} \frac{1}{\sqrt{(s_2 - a_2 p^2)^2 + b_2^2 p^2}} \cos(pt + \alpha - \beta).$$

Если колебательная система состоит из n частей с массами m_n, упругостями s_n и сопротивлениями r_n, связанных друг с другом, т. е. имеет n степеней свободы, то ее колебания отличаются от колебаний системы с двумя степенями свободы, в основном тем, что вместо двух собственных частот и двух форм нормальных колебаний она имеет n собственных частот и n форм нормальных колебаний. При воздействии синусоидальной силы, приложенной к одной из частей системы, во всей системе возбуждаются сложные колебания, которые состоят из свободных колебаний с частотами, равными собственным частотам системы, и вынужденных колебаний с частотой внешней силы.

При наличии сопротивления собственные колебания за небольшое время затухнут и останутся только вынужденные. При этом амплитуда и фаза будут определяться силой и отношениями частоты возбуждения к частотам собственных колебаний. При условии, что частота возбуждающей силы равна одной из собственных частот, может наступить резонанс. Таким образом, колебательная система с n степенями свободы может иметь n резонансов. Из них могут возбуждаться только те формы колебаний, ни одна из узловых точек которых не совпадает с точками приложения возбуждающей силы. Частота вынужденных колебаний, при которой точка приложения силы совпадает с узловой точкой формы i-го нормального порядка, называется частотой антирезонанса i-го порядка.

При заданной точке приложения вынуждающей силы и при увеличении частоты возбуждения колебательная система с n степенями свободы последовательно проходит состояния резонансов и антирезонансов. В общем случае число антирезонансов в системе с n степенями свободы на единицу меньше числа резонансов.

Ниже мы увидим на простейших примерах, что для решения задач о механических колебаниях систем как с одной, так и со многими степенями свободы удобно пользоваться методами теории электрических цепей.

В связи с этим в следующих параграфах рассмотрим метод электромеханических и электроакустических аналогий и основные теоремы из теории электрических цепей.

§ II.2. НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

Электрическая цепь состоит из ветвей, узлов, ячеек и контуров, которые содержат сопротивления, индуктивности и емкости. На рис. II.2.1 изображена цепь, состоящая из четырех ячеек (*1*—*4*) и четырех узлов (*I*—*IV*). Линии, соединяющие ячейки, называют *ветвями цепи*.

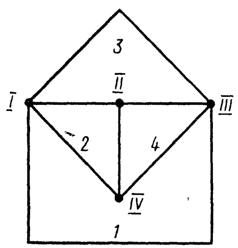

Рис. II.2.1

Большинство цепей относят к плоским. Они могут быть изображены на поверхности сферы. Если плоскую цепь перевести на поверхность сферы, то внешние границы цепи также образуют ячейки, подобно любым внутренним ячейкам. Токи и напряжения в электрических цепях подчиняются двум законам Кирхгофа. *Первый закон Кирхгофа* является следствием неуничтожаемости заряда — *сумма сил токов в узле равна нулю*:

$$\sum_{\nu} I_{\nu}=0 \tag{II.2.1}$$

(ток считается положительным, если он направлен к узлу).

Второй закон Кирхгофа — сумма мгновенных напряжений в любом замкнутом контуре равна нулю:

$$\sum_{\nu} U_{\nu}=0. \tag{II.2.2}$$

Источник, питающий цепь, может быть представлен либо генератором напряжения, либо генератором тока.

Генератором напряжения может быть источник э. д. с. $\tilde{\mathscr{E}}_0$, имеющий внутренний импеданс $\tilde{Z}_i$ (рис. II.2.2). Точки обозначают входные клеммы, к которым подсоединяется в цепи генератор напряжения. Напряжение на входе цепи меньше электродвижущей силы на падение напряжения на внутреннем импедансе и может быть вычислено по формуле

$$\tilde{U}=\tilde{\mathscr{E}}_0-\tilde{I}\tilde{Z}_i. \tag{II.2.3}$$

Генератор тока следует рассматривать чисто математически. У идеального генератора тока бесконечно большой импеданс, поскольку возбуждаемый им ток не зависит от нагрузки Z. Поэтому генератор на схеме изображают в виде шунтирующей ветви Z_i и стрелки, указывающей направление тока (рис. II.2.3). Очевидно, если $Z_i \to \infty$,