Здесь Z_0 — комплексная величина, которая для случая характеристик с нулями при $\omega_0=0$ пропорциональна $j\omega$:

$$Z_0=Z_{0L}=j\omega H_L,$$

а для схем с одним полюсом при $\omega=0$ выражается как емкостные реактивные сопротивления;

$$Z_0=Z_{0C}=1/(j\omega H_C)^2,$$

где H_L и H_C — функции всех емкостей и индуктивностей, входящих в ветви двухполюсника.

Числа $\omega_1, \omega_3, \ldots, \omega_{2n-1}$, являются корнями уравнения $Z=0$. При совпадении частоты с одним из них наступает резонанс напряжений. Числа $\omega_0, \omega_2, \ldots, \omega_{2n}$ — корни уравнения для комплексной проводимости $\frac{1}{Z}=0$. При совпадении частоты с одним из этих чисел в системе наблюдается резонанс токов.

Формула (II.2.30) показывает, что у двухполюсника с внешними нулями число резонансов на единицу больше числа антирезонансов. На рис. II.2.13 приведены графики частотных характеристик четырех типов двухполюсников. На этих графиках видно, что нули и полюса чередуются и что производная $\partial Z/\partial\omega>0$, т. е. положительна. При каждом переходе через нуль в каком-либо полюсе знак импеданса изменяется. Если частота ω больше частоты антирезонанса (т. е. расположена справа от какого-нибудь полюса) и меньше частоты соседнего резонанса (т. е. лежит слева от соседнего нуля), то импеданс, соответствующий этой частоте, отрицателен. Для частоты, лежащей левее полюса и правее следующего нуля, импеданс положителен.

Число нулей и полюсов сложного двухполюсника обычно определяют по числу независимых уравнений двухполюсников, но иногда можно воспользоваться следующим правилом. В каждой ячейке цепи поочередно вычеркивают одну емкость и одну индуктивность. Число пар вычеркнутых элементов равно числу нулей входного импеданса двухполюсника.

Выражение (II.2.30) широко используют при анализе цепей. С помощью этой формулы легко построить частотную характеристику, не проводя подробных расчетов. С этой целью необходимо найти вид зависимости Z_0 от $j\omega$. Затем определить каким-нибудь способом свойство двухполюсника при бесконечно больших частотах и численное значение модуля функции $Z(j\omega)$. Кроме того, необходимо знать сопротивление двухполюсника при какой-либо промежуточной частоте, не совпадающей с нулем или полюсом.

§ II.3. МЕТОД ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКИХ АНАЛОГИЙ

В современной акустике широко применяются методы решения задач, заимствованные из электротехники. Это стало возможным благодаря тому, что во многих областях физики, в том числе в акустике и электротехнике, многие задачи описывают одинаковыми дифференциальными уравнениями. С другой стороны, бурное развитие электро- и радиотехники привело к более полному исследованию электрических систем. Кроме того, построение электрических моделей механических систем сопряжено с меньшими трудностями, чем создание механических; они более компактны, и, что особенно важно, измерения в них более точны и удобны. Поэтому в некоторых случаях для решения акустических и механических задач полезно пользоваться методами теоретических и экспериментальных исследований электрических цепей.

Сходные математические законы, описывающие различные физические явления, не означают их тождества, а отражают только то, что математические модели этих явлений соответствуют одной и той же степени приближения. Математические модели первого приближения, подчиняются закону аддитивности, а следовательно, описываются линейными дифференциальными уравнениями. Так, например, ток и напряжение в одноэлементном двухполюснике, содержащем индуктивность, удовлетворяют линейному дифференциальному уравнению

$$U = -L\frac{dI}{dt}, \tag{II.3.1}$$

если принять, что в первом приближении индуктивность L не зависит от силы тока.

Указанному соотношению можно сопоставить связь между силой и ускорением

$$F = -m\frac{dv}{dt}, \tag{II.3.2}$$

если считать, что масса m не зависит от скорости. Отсюда следует прямая аналогия между напряжением U и силой F, индуктивностью L и массой m, силой тока I и скоростью v. Эти аналогии сохраняются и в энергетических соотношениях, а именно: работа, затрачиваемая внешним источником при увеличении силы тока от 0 до I, равна энергии магнитного поля тока проводника с индуктивностью L и может быть вычислена по формуле $A = LI^2/2$. Аналогично, для случая поступательного движения работа внешних сил, вызывающих увеличение скорости от 0 до v, равна кинетической энергии тела: $A = mv^2/2$.

Если электрическая цепь состоит из одной емкости, то при изменении заряда от q до $q+\Delta q$ на клеммах цепи возникает разность потенциалов $\Delta U = \frac{1}{C}\Delta q = \frac{1}{C}\frac{\Delta q}{\Delta t}\Delta t$. Если процесс происходит непрерывно, то за время от 0 до t разность потенциалов на клеммах двухполюсника увеличивается от 0 до U:

$$U = \frac{1}{C}\int_0^t \dot{q}\,dt = \frac{1}{C}\int_0^t I\,dt, \tag{II.3.3}$$

где I — сила тока смещения.

Таким образом, разность потенциалов U и сила тока I в двухполюснике, имеющем только один реактивный элемент — емкость C, связаны простейшим линейным интегральным уравнением (II.3.3).

Работа внешних источников, идущая на преодоление сил электрического поля, при увеличении заряда на dq равна $dA = \frac{1}{C} q\,dq$. Полную работу при изменении заряда от 0 до q можно записать в виде

$$A = W = \int_0^q \frac{1}{C} q\,dq = \frac{1}{C} \frac{q^2}{2}. \qquad \text{(II.3.4)}$$

Эта работа равна энергии электрического поля данного двухполюсника. Аналогичные соотношения имеются и в механике.

Известно, что при малых деформациях почти все тела подчиняются закону Гука, который в простейшем случае выражают формулой

$$F = -sx = -\frac{1}{c} x = -\frac{1}{c} \int_0^t v\,dt, \qquad \text{(II.3.5)}$$

где s и c — коэффициенты упругости и гибкости; x — смещение точки приложения внешней силы. Знак минус показывает, что направления смещения x и силы упругости противоположны.

Интегральные уравнения для тока (II.3.3) и скорости деформации упругого элемента (II.3.5) подобны, причем существуют прямые аналогии между электрическим напряжением U и силой F, емкостью C и гибкостью c, силой тока I и скоростью v. Эта аналогия сохраняется и дальше. Например, потенциальную энергию упругого элемента вычисляют по формуле $W = x^2/(2c)$, подобной формуле (II.3.4) для энергии заряженного конденсатора.

Рассмотрим одноэлементный двухполюсник в виде сопротивления потерь. Напряжение на его зажимах прямо пропорционально силе тока, если R не зависит от I. Эта независимость является первым приближением, обеспечивающим линейную связь между силой тока и напряжением. Активное сопротивление как элемент электрической цепи имеет важную особенность по сравнению с реактивными элементами — индуктивностью и емкостью. Она состоит в том, что на сопротивлении потерь происходит необратимое рассеяние энергии. Обычно эти потери равны количеству теплоты, выделяющемуся в цепи при прохождении тока. Согласно закону Джоуля — Ленца, эти потери пропорциональны квадрату силы тока.

В механических системах всегда существует рассеяние энергии движения. Обычно его связывают с силами трения, зависящими от многих факторов и подчиняющимися различным законам. В механических колебательных системах существенное значение имеет вязкое жидкостное трение, внутреннее трение и сопротивление излучения.

Вязкое трение возникает при относительном перемещении поверхности тела и жидкости. При этом, если выполняются определенные условия, то со стороны жидкости на тело действует сила сопротивления, пропорциональная скорости перемещения v:

$$F = -rv, \qquad (II.3.6)$$

где r — механическое сопротивление.

В первом приближении, как показывает опыт, при малых скоростях v коэффициент r не зависит от скорости и уравнение (II.3.6) линейно. Коэффициент сопротивления вязких потерь в некоторых случаях может быть рассчитан по точным формула́м, но обычно в большинстве прикладных задач его находят на основе эксперимента.

Другой причиной необратимых потерь энергии при механических колебаниях является внутреннее трение, возникающее в результате действия различных факторов, приводящих к отклонению свойств материала от закона Гука, а также возникновению градиентов температуры в местах, где деформация материала, возникающая при колебаниях, неоднородна. Силы внутреннего трения также пропорциональны скорости и могут быть вычислены по формуле (II.3.6), при этом v — скорость деформации, а r — механическое сопротивление, обусловленное внутренним трением, которое при малых скоростях также не зависит от скорости, но, как показывает опыт, является функцией частоты. Наконец, потери энергии в механической колебательной системе происходят за счет излучения упругих волн. Этот вид потерь характеризуется сопротивлением излучения, которое также пропорционально скорости. Иногда это сопротивление излучения называют *трением излучения*. Оно характеризует полную мощность акустического излучения, выделяемую колебательной системой в окружающее пространство.

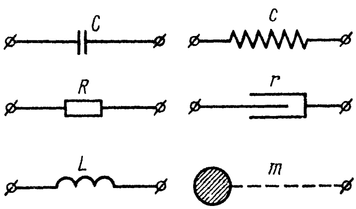

Рис. II.3.1

Сравнение линейных законов, которым подчиняются одноэлементные электрические двухполюсники (L, C, R), с линейными законами механики для механических элементов (m, c, r) и сопоставление интегрально-дифференциальных уравнений для описания процессов в простых электрических и механических системах показывает, что одноэлементный двухполюсник сходен с соответствующим механическим элементом. В частности, индуктивности аналогична масса, емкости — гибкость, электрическому сопротивлению потерь — механическое сопротивление.

На рис. II.3.1 представлены схематические изображения электрических одноэлементных двухполюсников и подобных им механических элементов.

Подобно тому́, как сложную электрическую цепь можно представить в виде многоэлементного двухполюсника или многополюсника, реальную механическую систему можно заменить некоторой идеализированной системой, состоящей из большого числа соединенных между собой механических элементов. Способ соединения элементов определяется характером распределения сил и перемещений. Из многообразия возможных типов соединения элементов полезно выделить три типа:

а) соединение элементов, в котором скорость каждого элемента равна скорости всей системы, а сила, действующая на всю систему, равна сумме сил, приложенных к каждому элементу, — *соединение в узел* (рис. II.3.2, *б*);

б) соединение элементов, в котором скорость системы равна сумме скоростей отдельных элементов, а сила, приложенная ко всей системе, равна силе, приложенной к каждому из них, — *соединение в цепочку* (рис. II.3.2, *а*);

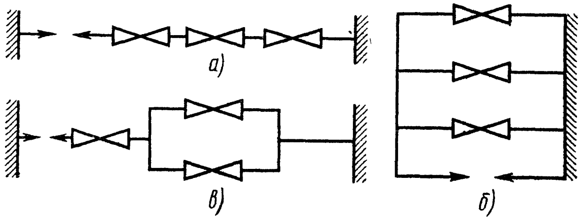

Рис. II.3.2

в) *смешанное соединение* элементов имеет такая механическая система, в которой встречаются как соединение в цепочку, так и соединения в узел (рис. II.3.2, *в*).

Примером устройства, где механические элементы соединены в узел, является простая колебательная система, состоящая из массы и пружины (рис. II.3.3, *а*). Она может быть условно изображена в виде механической цепи, представленной на рис. II.3.3, *б*, где механические элементы соединены в узел. Уравнение этой системы (I.4.1) запишем в виде

$$m\frac{dv}{dt}+rv+\frac{1}{c}\int v\,dt=F(t), \tag{II.3.7}$$

где $v = d\xi/dt$ — скорость; $\int v\,dt=\xi$ — смещение.

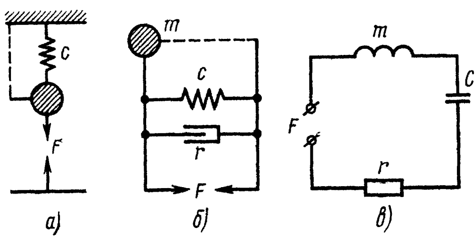

Рис. II.3.3

Сходное интегрально-дифференциальное уравнение получается для электрической цепи с последовательным соединением электрических элементов:

$$L\frac{dI}{dt}+RT+\frac{1}{C}\int_0^t I\,dt=\mathscr{E}(t). \tag{II.3.8}$$

Сравнение этих уравнений приводит к заключению, что если придерживаться аналогии сила — электрическое напряжение, то соединению механических элементов в узел соответствует последовательное соединение элементов электрической цепи (рис. II.3.3, *в*).

Для выяснения вопроса, какой электрической схеме можно сопоставить механическую систему, элементы которой соединены в цепочку, выведем уравнение для простой колебательной системы, схематично изображенной на рис. II.3.4, *б*. Эта механическая система состоит из пружины *с*, сосуда *Б*, наполненного вязкой жидкостью, и устройства, состоящего из штока *В*, проходящего через горловину сосуда, и перфорированного поршня *Г*. Гибкость *с* пружины, механическое сопротивление *r* вязкой жидкости и масса *m* сосуда являются механическими элементами данной колебательной системы, соединенными

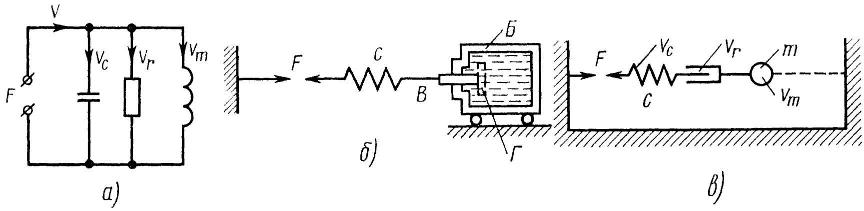

Рис. II.3.4

в цепочку (рис. II.3.4, *в*). Трением сосуда о поверхность подставки пренебрегаем. Допустим, что под действием силы *F* система совершает вынужденные колебания. Вследствие того, что элементы соединены в цепочку, внешняя сила в каждый момент времени равна силам, возникающим на каждом из перечисленных элементов, а скорость v равна сумме скоростей движения соответствующих элементов:

$$v = v_c + v_r + v_m, \qquad \text{(II.3.9)}$$

где v_c, v_r, v_m — скорости элементов упругости (c), сопротивления (r), массы (m).

На основании зависимостей (II.3.5), (II.3.6) и (II.3.2) найдем скорости v_c, v_r и v_m как функции силы F и после подстановки в (II.3.9) получим интегрально-дифференциальное уравнение относительно этой силы:

$$c\frac{dF}{dt} + \frac{1}{r}F + \frac{1}{m}\int_0^t F df = v(t). \qquad \text{(II.3.10)}$$

Аналогичное уравнение получается для напряжения U, приложенного к схеме с параллельным соединением электрических элементов:

$$C\frac{dU}{dt} + \frac{1}{R}U + \frac{1}{L}\int_0^t U\,dt = I(t). \qquad \text{(II.3.11)}$$

Сравнение (II.3.10) и (II.3.11) показывает, что при сохранении прямых аналогий между напряжением и силой соединению механических элементов в цепочку соответствует параллельное соединение электрических элементов (рис. II.3.4,*а*).

Прямая система электромеханических аналогий не является единственно возможной. Можно составить и другие системы аналогий, основанные на сходстве дифференциальных уравнений. Среди них в электроакустике используют *обратную (инверсную) систему аналогий*. Она основана на сходстве уравнений (II.3.10) для простой механической системы с соединением механических элементов в цепочку с (II.3.8) для электрической цепи с последовательным соединением электрических элементов. Эти уравнения подобны, и можно построить систему аналогий, в которой механическим аналогом индуктивности является гибкость, аналогом сопротивления потерь — величина, обратная механическому сопротивлению, аналогом напряжения — скорость. Такую систему называют *инверсной*. При этом параллельному соединению электрических элементов соответствует в механических системах соединение в узел, последовательному — в цепочку. Сравнивая элекромеханические схемы одного и того же механического устройства, составленные по прямой и инверсной системам аналогий, видно, что они дуальны: одна из них импедансная, а другая представляет собой схему обратных сопротивлений. Пользуясь правилом перехода от одной дуальной цепи к другой, легко перейти от схемы, составленной согласно прямой системе электромеханических аналогий, к соответвующей инверсной схеме.

В табл. II.3.1 дана сводка основных величин-аналогов.

Таблица II.3.1.

Система		
электрическая	прямых аналогий	обратных аналогий
Напряжение U	Сила F	Скорость v
Сила тока I	Скорость v	Сила F
Индуктивность L	Масса m	Гибкость c
Активное сопротивление R	Сопротивление r	Величина, обратная коэффициенту сопротивления
Емкость C	Гибкость c	Масса m

Наряду с системой электромеханических аналогий широкое применение нашла система электроакустических аналогий, где в прямое соответствие электрическому напряжению на участке электрической цепи ставится разность давлений на участке механического устройства, содержащего элементы вязкого трения, инерции и объемной упругости. Указанная система аналогий может быть названа системой электрическое напряжение — акустическое давление.

Для построения ее найдем акустические уравнения для механических систем, аналогичные уравнениям для простых электрических двухполюсников:

$$\Delta U = RI; \tag{II.3.12а}$$

$$\Delta U = \frac{1}{C}\Delta q = \frac{1}{C}\int_0^t I\,dt; \tag{II.3.12б}$$

$$\Delta U = -L\frac{dI}{dt}. \tag{II.3.12в}$$

Рассмотрим поток жидкости через короткую трубку с узким каналом, для которой выполняется закон Пуазейля

$$\Delta p = \frac{8\eta l\pi}{S^2}\dot{X}, \tag{II.3.13}$$

где η — вязкость жидкости; l — длина трубки; S — площадь поперечного сечения; $\dot{X}$ — объемная скорость жидкости.

Очевидно, формула (II.3.13) подобна формуле $\Delta U = RI$, выражающей закон Ома для участка электрической цепи. Поэтому электрическим аналогом объемной скорости $\dot{X}$ является ток I на участке цепи, а электрическим аналогом $8\eta l\pi/S^2 = r_а$ — сопротивление R участка цепи. Величина $r_а$ может быть названа *акустическим сопротивлением* трубки.

Таким образом, данной акустической системе соответствует одноэлементный электрический двухполюсник с сопротивлением R.

В ка́честве примера акустического устройства, аналогичного электрическому двухполюснику, содержащему только одну емкость, исследуем замкнутый объем газа или жидкости. При изменении внешнего давления в интервале p, $p+\Delta p$ объем газа изменится от V до $V-\Delta V$. Если сжатие без теплообмена (адиабатическое), то в линейном приближении можно записать

$$\Delta V = \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_s \Delta p,$$

или

$$\Delta p = -\frac{1}{\beta_s V_0}\Delta V, \tag{II.3.14}$$

где $\beta_s = -\frac{1}{V_0}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_s$ — коэффициент адиабатической сжимаемости.

Сравнивая (II.3.12б) с (II.3.14), находим, что акустическим аналогом электрической емкости должна быть величина $c_а = \beta_S V_0$, называемая *акустической податливостью* объема.

Наконец, акустическим аналогом производной тока по времени в этой системе аналогий должно быть полное объемное ускорение потока жидкости или газа $d\dot{X}/dt$. В соответствии с этим простейшим акустическим устройством, в котором можно выделить это ускорение, является небольшой отрезок трубки, в которой под действием звукового давления образуется ускоренный поток жидкости. Согласно второму закону Ньютона, объемное ускорение этого потока определяется формулой, вполне сходной с формулой, выражающей закон

Фарадея [см. (II.3.12в)],

$$\Delta p = -\frac{\rho l S}{S^2} \frac{d\dot{X}}{dt}. \qquad (II.3.15)$$

В связи с этим величина $\rho l S / S^2 = m_a$ является акустическим аналогом индуктивности и называется *акустической массой.*

Таким образом, система электроакустических аналогий содержит следующие соответствия: давление — электрическое напряжение; объемная скорость — электрический ток; электрическое сопротивление — акустическое сопротивление; электрическая емкость — полная акустическая сжимаемость объема; индуктивность — акустическая масса.

Многие задачи расчета низкочастотных акустических устройств успешно могут быть решены с помощью электроакустических аналогий.

§ II.4. ПРИМЕРЫ РАСЧЕТА НЕКОТОРЫХ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ

Звуковой гриб представляет собой устройство для создания звукового поля звуковых и инфразвуковых частот в жидкости. Он состоит из магнитострикционного стержня, на концах которого прикреплены m_1 и m_2. Одна из масс (например, m_1) колеблется в воздухе, а другая (m_2) действует на диафрагму находящуюся в воде.

Механическая модель этого устройства представлена на рис. II.4.1, *а*. В обмотку магнитострикторa подают ток подмагничивания и переменный ток, возбуждающий работу магнитострикционного стержня. Масса m_1 испытывает небольшое сопротивление излучения, которым можно пренебречь, а масса m_2 — волновое сопротивление воды.

Зададим следующие конструктивные данные: длина стержня $l = 0{,}2$ м; его поперечное сечение $S = 10$ см$^2 = 10^{-3}$ м^2; добротность устройства $Q = 500$; частота излучателя $f = 30$ Гц. Определим отношение m_1/m_2 и значения масс.

Для решения задачи по условному изображению устройства (рис.II.4.1, *а*) построим символическую схему соединения механических элементов (рис. II.4.1,б) и составим эквивалентную электрическую схему, по которой проведем расчет.

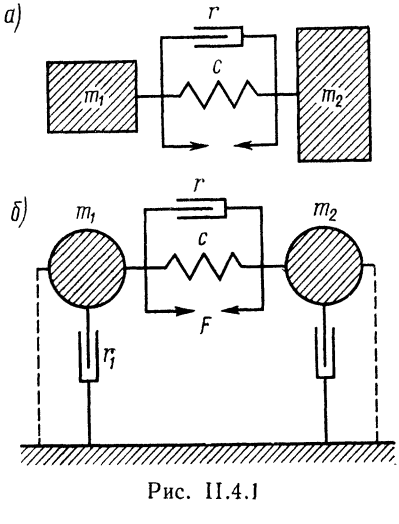

Рис. II.4.1

На рис. II.4.1,*б* изображена механическая схема, состоящая из двух масс, каждая из которых соединена со своими сопротивлениями r_1 и r_2 в узел; между массами расположен стержень с гибкостью c и сопротивлением потерь r, которые соединены в узел. На упругий элемент c действует внешняя сила F.

Используя прямой метод электромеханических аналогий, по схеме рис. II.4.1,*б* составим электрическую схему (рис. II.4.2,*а*). Имея в виду, что сопротивлением излучения в воздух можно пренебречь, эту схему легко упростить и представить, как на рис. II.4.2,*б*. Далее удобно перейти к эквивалентной схеме с последовательным колебательным контуром. Это сделаем рядом преобразований: цепь с последовательным соединением r_2 и $j\omega m_2$ заменим параллельным соединением r_2^* и $j\omega m_2$