§ III.4. ЭЛЕМЕНТЫ ПОТЕРЬ НА ВЯЗКОСТНОЕ ТРЕНИЕ И ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ

Затухание волн звукового диапазона частот, распространяющихся в свободном пространстве, незначительно. Однако если волны распространяются вблизи твердой границы раздела, то даже при низких частотах наблюдаются заметные потери, которые определяются большими градиентами скорости и температуры в пристеночном слое и зависят от теплопроводности стенок и вязкости среды.

Известно, что сила вязкого трения определяется уравнением Ньютона

$$\frac{dF}{dS} = -\eta \frac{d\dot{\xi}}{dz},$$

где z — координата, совпадающая с направлением нормали к границе поверхности с жидкостью; $\dot{\xi}$ — тангенциальная составляющая скорости движения частиц жидкости.

Функция ξ может быть определена, как решение уравнения Навье — Стокса:

$$\rho \frac{\partial \dot{\xi}}{\partial t} = \eta \frac{\partial^2 \dot{\xi}}{\partial z^2}. \qquad \text{(III.4.1)}$$

Если внутри жидкости частицы совершают гармоническое колебание $\xi(z, t) = \xi_0 e^{j\omega t}$, то следует ожидать, что вблизи поверхности скорость частиц является гармонической функцией времени вида

$$\dot{\xi}(z, t) = \dot{\xi}_0(z) e^{j\omega t},$$

причем на границе $z=0$ скорость частиц равна нулю, а функция $\dot{\xi}_0(z)$ должна удовлетворять уравнению

$$\frac{d^2\dot{\xi}_0}{\partial z_0^2} - j\frac{\omega\rho}{\eta}\dot{\xi}_0 = 0. \qquad \text{(III.4.2)}$$

Решением (III.4.2), удовлетворяющим условиям $\dot{\xi}_{0\,|\,z=0} = 0$ и $\dot{\xi}_{0\,|\,z=h} = u_0$, является реальная часть комплексной функции $\dot{\xi}_0 = Ae^{jkz}$ при $k = \sqrt{-j\omega\rho/\eta}$ и $A = u_0 e^{-jkh}$. Принимая, что $\sqrt{-j} = \sqrt{e^{-j\pi/2}} = e^{-j\pi/4} = \left(\cos\frac{\pi}{4} - j\sin\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1-j)$, получаем комплексное волновое число

$$k = \beta(1-j),$$

где $\beta = \sqrt{\omega\rho/(2\eta)}$.

Таким образом, колебательная скорость жидкости вблизи плоской поверхности выражается функцией

$$\dot{\xi} = u_0 e^{\beta(z-h)} e^{j[\omega t + \beta(z-h)]}, \qquad \text{(III.4.3.)}$$

где h — расстояние от поверхности, соответствующее значению скорости $\dot{\xi}(h) = u_0$.

Формула (III.4.3) описывает квазиволновой процесс с амплитудой, уменьшающейся в $e = 2{,}713$ раза на расстоянии $\delta = 1/\beta$. Фазовая скорость этого волнового процесса равна

$$c' = \frac{\omega}{\beta} = \sqrt{\frac{2\eta\omega}{\rho}}. \qquad \text{(III.4.4)}$$

Она зависит от частоты; ее числовое значение меньше, чем у скорости объемных волн. Направление колебаний частиц в рассматриваемой волне перпендикулярно направлению распространения. Эти волны впервые изучены *Стоксом*, поэтому их часто называют вязкими *волнами Стокса.* Вязкие волны затухают очень сильно. На расстоянии 1/6,28 волны $[1/\beta = \lambda'/(2\pi)]$ амплитуда уменьшается в e раз. Например, при частоте 500 Гц длина стоксовской волны составляет в воздухе $\lambda' = 0{,}6$ мм и затухание в e раз осуществляется в слое толщиной $1/\beta \approx 0{,}1$ мм.

Найдем механический импеданс единицы площади поперечного сечения трубы. Допустим, что длина волны больше, чем длина трубы. В этом случае жидкость в трубе под действием градиента давления движется как одно целое без деформации. Механический импеданс единицы площади поперечного сечения трубы в данном случае есть отношение разности давлений в начале и конце трубы к амплитуде скорости v, усредненной по сечению:

$$z = \frac{Hl}{\langle v \rangle},$$

где H — отрицательный градиент давления; $\langle v \rangle$ — скорость, усредненная по площади поперечного сечения.

Скорость движения несжимаемой вязкой жидкости в круглой трубе подчиняется уравнению Навье — Стокса в цилиндрической системе координат:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\eta}{\rho}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}\right),$$

которое для установившихся колебаний ($v = v_0 e^{j\omega t}$) при градиенте давления $\partial p/\partial z = -He^{-j\omega t}$ преобразуется к виду

$$\frac{d^2 v_0}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dv_0}{dr} + k^2 v_0 = -\frac{H}{\eta}. \qquad \text{(III.4.5)}$$

Решение (III.4.5) должно удовлетворять граничному условию на стенке трубы:

$$v(r)\,|_{r=a} = 0, \qquad \text{(III.4.6)}$$

где $k = \sqrt{-j\omega\rho/\eta} = (1-j)\,\beta$.

Для решения (III.4.5) введем новую переменную $x = ka$ и получим:

$$\frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dv}{dx} + v = -\frac{H}{k^2\eta}, \quad v(x)\,|_{x=ka} = 0.$$

Это выражение имеет решение в виде суммы частного решения уравнения с правой частью и решения однородного уравнения Бесселя нулевого порядка:

$$v = A\mathcal{J}_0(x) - \frac{H}{k^2\eta}.$$

Используя граничное условие, определяем постоянную:

$$A = \frac{H}{\mathcal{J}_0(ka)\,k^2\eta}.$$

Таким образом, амплитуда скорости частиц и средняя скорость $\langle v\rangle$ по сечению трубы жидкости равны:

$$v = -\frac{H}{k^2\eta}\left[1 - \frac{\mathcal{J}_0(kr)}{\mathcal{J}_0(ka)}\right], \tag{III.4.7}$$

$$\langle v\rangle = \frac{2\pi}{\pi a^2}\int_0^a v(r)\,r dr = -\frac{H}{k^2\eta}\left[1 - \frac{2}{ka}\,\frac{\mathcal{J}_1(ka)}{\mathcal{J}_0(ka)}\right]. \tag{III.4.8}$$

Разность давлений выражают через отрицательный градиент давления соотношением $\Delta p = Hl$. В результате получается формула импеданса единицы поперечного сечения трубы длиной l:

$$z = -\frac{k^2\eta l}{1 - \dfrac{2}{ka}\,\dfrac{\mathcal{J}_1(ka)}{\mathcal{J}_0(ka)}}. \tag{III.4.9}$$

Если разделить удельный механический импеданс на площадь S, то получим акустический импеданс участка l трубы:

$$z_a = -\frac{1}{\pi a^2}\,\frac{k^2\eta l}{1 - \dfrac{2}{ka}\,\dfrac{\mathcal{J}_1(ka)}{\mathcal{J}_0(ka)}}. \tag{III.4.10}$$

Для низких частот при вычислении импеданса z можно пользоваться приближенными выражениями функций $\mathcal{J}_0(x)$ и $\mathcal{J}_1(x)$:

$$\mathcal{J}_0(x) \approx 1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{64}, \quad \mathcal{J}_1(x) \approx \frac{x}{2}\left(1 - \frac{x^2}{8} + \frac{x^4}{174}\right)$$

при $x = a\sqrt{(2\omega\rho)/\eta}\,(1 - j)$; $|x| = 2a\sqrt{(\omega\rho)/\eta} < 1$.

Тогда (III.4.9) сводится к приближенной формуле

$$z \approx \frac{8\eta l}{a^2} + j\omega\,\frac{4}{3}\,\rho l, \tag{III.4.11}$$

где a — радиус, l — длина участка трубы. Таким образом, импеданс тонких трубок имеет активную составляющую, равную коэффициенту Пуазейля $(8\eta l/a^2)$, и реактивную, которая равна инерционному сопротивлению жидкости. При этом эффективная масса жидкости, составляющая инерционное сопротивление, больше, чем масса жидкости в трубе: масса жидкости в трубе длиной l составляет на единицу поперечного сечения ρl, а эффективная масса $4/(3\rho l)$; вязкость как бы вносит в процесс колебания дополнительную массу.

При уменьшении радиуса трубы инерционное сопротивление остается неизменным, в то время как активная часть импеданса увеличивается.

Если радиус трубы значительно меньше глубины проникновения вязких стоксовских волн, то реактивной частью импеданса можно пренебречь. В этом случае импеданс трубы имеет только активную составляющую, которая не зависит от частоты:

$$z \approx x \approx \frac{8\eta l}{a^2}. \tag{III.4.12}$$

В прикладной акустике в качестве элемента активного сопротивления применяют активное сопротивление тонкой трубки (III.4.12).

Для случая, когда модуль фактора $|ka|$ удовлетворяет неравенству

$$1 < |ka| = 2a\sqrt{\frac{\omega\rho}{\eta}} < 10, \tag{III.4.13}$$

можно получить следующее приближенное выражение импеданса трубы при условии, когда $(\delta/a)^2 \ll 1$:

$$z \approx j\omega\rho l\left(1+\frac{\delta}{a}\right)+\rho c' l\left(1+\frac{2\delta}{a}\right), \tag{III.4.14}$$

$$Z = zS = X + jY,$$

где $j\omega\rho l$ — удельное инерционное сопротивление жидкости, заполняющей трубу; $X = \rho c' l\,(1+(2\delta)/a)S$; $Y = \omega\rho l\,(1+\delta/a)S$; $c' = \sqrt{(2\eta\omega)/\rho}$; $\delta = \sqrt{(\omega\rho)/(2\eta)}$.

Выражение (III.4.14) показывает, что пристеночный слой вследствие вязкости вносит дополнительное сопротивление $\omega\rho l\delta/a$. Поскольку формула верна для отношений δ/a, близких к 0,1, следует считать, что это сопротивление не играет существенной роли: при $\delta/a \approx 0{,}2$ приближение $(\delta/a)^2 \ll 1$ не имеет места и формула теряет смысл.

Наряду с инерционным сопротивлением пристеночный вязкий слой создает активное сопротивление, которое приблизительно равно удельному волновому сопротивлению стоксовских волн, умноженному на длину трубы. Потери колебательной энергии, рассчитанные на полное сечение трубы, определяют как

$$W = \frac{X\,|\langle v\rangle^2|}{2} = \frac{1}{2}\rho c' l S\,|\langle v\rangle|^2,$$

где $|\langle v\rangle|^2$ — квадрат средней скорости движения частиц.

§ III.5. КОРРЕКТИРУЮЩИЕ КОНТУРЫ И ИХ АКУСТИЧЕСКИЕ АНАЛОГИ

В электротехнике принято называть *корректирующим контуром* дополнительную часть общей цепи, обеспечивающую сглаживание частотной характеристики выходного сигнала. Отношение напряжения на нагрузке к напряжению на входе цепи называют *коэффициентом передачи напряжения*:

$$K_U(\omega) = \frac{U_{\text{н}}}{U_{\text{вх}}}.$$