

## ГЛАВА IV

# КОЛЕБАНИЯ ОДНОМЕРНЫХ СИСТЕМ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

В предыдущих главах были рассмотрены системы, в которых параметры масса и упругость разделены. При достаточно высоких частотах каждый элемент объема упругого тела проявляет как инерционные, так и упругие свойства и во время колебаний обладает как кинетической, так и потенциальной энергией. В этом случае масса и упругость распределены по объему колебательной системы. Поэтому ее называют *системой с распределенными параметрами*. В каких же случаях можно допускать идеализацию о сосредоточенных параметрах, а в каких она недопустима? Чтобы ответить на этот вопрос, обратимся к известным из курса физики представлениям о распространении упругих возмущений. Если на какой-либо участок поверхности упругого тела воздействовать гармонической силой, то вызванная деформация будет распространяться в теле с некоторой конечной скоростью, определяемой формулой

$$c = \sqrt{\frac{E_9}{\rho}},$$

где  $E_9$  — эффективный коэффициент упругости;  $\rho$  — плотность среды.

Очевидно, что состояние упругого возмущения распространится на расстоянии  $l$  за время

$$\tau = \frac{l}{c} = l \sqrt{\frac{\rho}{E_9}}.$$

Допустим, что время  $\tau$  значительно меньше, чем период колебания  $T = 2\pi/\omega$ . Это значит, что за время  $\tau$  фаза колебаний практически не изменится. Пусть свойства среды таковы, что фаза ускорения частиц совпадает с фазой вынуждающей силы, тогда система ведет себя в колебаниях как масса, а упругими свойствами ее можно пренебречь. Если окажется, что смещение совпадает по фазе с вынуждающей силой, то система ведет себя как идеальная упругость, влияние массы на характер вынужденных колебаний незначительно. В связи с этим для изучения поведения системы на низких частотах ее можно условно разделить по характеру колебаний на отдельные части. В одних частях колебания управляются массой, а в других — упругостью. Главным условием возможности такого разделения является то, что линейные размеры отдельных частей системы во много раз меньше длины упругой волны.

Если линейные размеры тела сравнимы или больше длины волны, то время распространения в нем упругих волн сравнимо с периодом колебаний или больше него. В результате отражений волн от границ и их суперпозиции в теле установятся сложные колебания с определенным распределением фаз. В этом случае упругое тело можно рассматривать как колебательную систему с распределенными параметрами.

В зависимости от отношения к длине волны линейных размеров колебательных систем их условно можно разделить на одномерные струны, стержни, тонкие трубы, двухмерные тонкие пластины и оболочки, мембраны и трехмерные замкнутые достаточно протяженные объемы. В одномерных системах размеры по длине значительно больше поперечных размеров и в то же время сравнимы с длиной волны или больше нее.

### § IV.1. ПОПЕРЕЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СТРУНЫ

**Вывод уравнения струны.** Наиболее простым примером одномерной системы с распределенными параметрами является гибкая струна, т. е. нить, сильно натянутая между неподвижными точками. Натяжение предполагается настолько большим, что силы, вызывающие изгиб струны, значительно меньше сил растяжения. Сила натяжения струны может быть вычислена на основании закона Гука для одно-

родных деформаций растяжения:

$$T = E \frac{\Delta l}{l} S,$$

где  $E$  — модуль Юнга;  $\Delta l$  — удлинение нити;  $l$  — длина;  $S$  — площадь поперечного сечения нити. Предполагается, что  $\sqrt{S/l} \ll 1$ .

Исследуем малые поперечные колебания струны около положения статического равновесия. Расположим систему координат так, чтобы ось  $OX$  совместилась с положением равновесия струны. Тогда каждую точку струны будем характеризовать координатой  $X$ , а состояние ее движения в момент времени  $t$  — смещением от положения

равновесия  $u(x, t)$ . Для поперечных колебаний вектор  $u(x, t)$  перпендикулярен оси  $OX$  и может быть представлен двумя проекциями:  $u_y(x, t)$  и  $u_x(x, t)$ . Допустим, что на струну действуют поперечные силы, лежащие в плоскости  $XOY$ . Тогда  $u_z(x, t) = 0$  и движение струны будет осуществляться только в плоскости  $XOY$ .

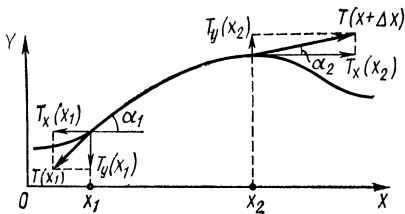


Рис. IV.1.1

Обозначим компоненту вектора смещения в плоскости  $XOY$  через  $y(x, t)$ . Эта функция определяет профиль струны в каждый момент времени. Выделим участок профиля  $x_1 \leq x < x_2$  (рис. IV.1.1). Пусть на этот участок струны действуют внешние силы, результирующая

которых  $\int_{x_1}^{x_2} f(x) dx$ , а сила трения, пропорциональная скорости движения,  $\int_{x_1}^{x_2} r(x) \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} dx$ . Кроме того, к концам участка струны приложены силы натяжения, направленные по касательным к профилю струны в точках  $x_1$  и  $x_2$ ,  $\mathbf{T}(x_1)$  и  $\mathbf{T}(x_2)$ .

Составим уравнение динамического равновесия проекций сил по осям  $X$  и  $Y$ :

$$T_y(x_1) + T_y(x_2) - \int_{x_1}^{x_2} r(x) \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = \int_{x_1}^{x_2} \rho(x) \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} dx; \quad (IV.1.1)$$

$$T_x(x_1) + T_x(x_2) = 0.$$

Здесь  $x$  и  $y$  обозначают направления проекции. Величины этих проекций, как это следует из рис. IV.1.1, определяют следующими формулами:

$$\begin{aligned} T_y(x_1) &= |\mathbf{T}(x_1)| \sin(\mathbf{T}, x) = -T(x_1) \sin \alpha_1, \\ T_y(x_2) &= |\mathbf{T}(x_2)| \sin(\mathbf{T}, x) = T(x_2) \sin \alpha_2, \\ T_x(x_1) &= |\mathbf{T}(x_1)| \cos \alpha_1 = -T(x_1) \cos \alpha_1 = -T(x_1) \sqrt{1 - \sin^2 \alpha_1}, \\ T_x(x_2) &= |\mathbf{T}(x_2)| \cos \alpha_2 = T(x_2) \cos \alpha_2 = T(x_2) \sqrt{1 - \sin^2 \alpha_2}. \end{aligned} \quad (IV.1.2)$$

Для упрощения дальнейших выкладок введем следующее ограничение. Допустим, что любой из возможных профилей струны достаточно гладок, т. е. углы  $\alpha(x)$ , образованные между направлениями касательной в любой точке профиля и оси  $OX$ , настолько малы, что с определенной степенью точности можно считать

$$\sin[\alpha(x)] \approx \operatorname{tg}[\alpha(x)] = \frac{\partial y(x, t)}{\partial x}. \quad (\text{IV.1.3})$$

Тогда

$$T_y(x_2) - T_y(x_1) = T(x_2) \frac{\partial y}{\partial x} \Big|_{x=x_2} - T(x_1) \frac{\partial y}{\partial x} \Big|_{x=x_1}. \quad (\text{IV.1.4})$$

При  $x_2 \rightarrow x_1$  правая часть (IV.1.4) стремится к выражению для поперечной составляющей силы натяжения, действующей на точку струны с координатой  $x$ :

$$\lim_{x_2 \rightarrow x_1} \left\{ T(x_2) \frac{\partial y}{\partial x} \Big|_{x=x_2} - T(x_1) \frac{\partial y}{\partial x} \Big|_{x=x_1} \right\} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ T(x) \frac{\partial y}{\partial x} \right] dx. \quad (\text{IV.1.5})$$

Для конечного отрезка  $x_1 \leq x \leq x_2$  составляющая силы натяжения по оси  $Y$  выразится интегралом

$$T_y(x_1) + T_y(x_2) = - \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial x} \left[ T(x) \frac{\partial y}{\partial x} \right] dx. \quad (\text{IV.1.6})$$

В рамках приближения (IV.1.3) система уравнений (IV.1.1) имеет вид

$$\int_{x_1}^{x_2} \left\{ \rho(x) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + r(x) \frac{\partial y}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left[ T(x) \frac{\partial y}{\partial x} \right] - f(x, t) \right\} dx = 0; \quad (\text{IV.1.7})$$

$$\int_{x_1}^{x_2} \left\{ T(x_2) \sqrt{1 - \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2} \Big|_{x=x_2} - T(x_1) \sqrt{1 - \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2} \Big|_{x=x_1} \right\} dx = 0.$$

Если смещения частиц настолько малы, что  $(\partial y / \partial x)^2 \ll 1$ , то из второго уравнения (IV.1.7) следует, что натяжение струны постоянно для всех точек:

$$T(x_1) = T(x_2) = T. \quad (\text{IV.1.8})$$

Подынтегральная функция в первом уравнении должна быть тождественно равна нулю, в противном случае найдутся такие значения  $x_1$  и  $x_2$ , для которых равенство (IV.1.7) будет невозможным. Приравнявая к нулю (IV.1.7), получим дифференциальное уравнение малых колебаний струны:

$$\rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + r \frac{\partial y}{\partial t} - T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = f(x, t). \quad (\text{IV.1.9})$$

Для свободных колебаний [ $f(x, t) = 0$  при  $r = 0$ ] дифференциальное уравнение струны имеет вид волнового уравнения:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{T}{\rho} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0. \quad (\text{IV.1.10})$$

Уравнение (IV.1.9) содержит вторые производные по координате  $x$  и времени  $t$ . Поэтому для решения задачи о движении струны необходимо иметь два начальных и два граничных условия. В качестве начальных условий задают профиль струны и скорость его движения в начальный момент времени:

$$y(x, t)|_{t=t_0} = f(x), \quad \frac{\partial y}{\partial t}|_{t=t_0} = \varphi(x). \quad (\text{IV.1.11})$$

Граничные условия определяют законом движения концов струны:

$$y(x, t)|_{x=0} = y_0(t); \quad y(x, t)|_{x=l} = y_l(t). \quad (\text{IV.1.12})$$

Они могут быть заданы также в форме импедансов границ струны:

$$Z_0 = \frac{F(0, t)}{(\partial y / \partial t)|_{x=0}} = Z_0(t), \quad Z_l = \frac{F(l, t)}{(\partial y / \partial t)|_{x=l}} = Z_l(t). \quad (\text{IV.1.13})$$

Эта форма записи граничных условий особенно удобна для действия периодической силы  $F = F_0 e^{j\omega t}$ , приложенной к одной из границ струны.

Решение неоднородного дифференциального уравнения состоит из общего решения уравнения и частного решения уравнения с правой частью.

Известно, что волновое уравнение принадлежит к уравнениям гиперболического типа и может быть решено как методом Даламбера, так и методом Фурье. Оба метода приводят к одинаковым результатам. Однако одни задачи проще решать первым методом, другие — вторым. Поэтому полезно ознакомиться как с тем, так и с другим методом.

К дифференциальному уравнению струны приводятся многие задачи математической физики. В таких случаях можно пользоваться методом аналогий — зная решение одной задачи, можно записать решение задачи, относящейся к другой области, но соответствующей одним и тем же дифференциальным уравнениям, аналогичным граничным и начальным условиям. К подобному типу относят задачи о распространении упругого импульса в трубах и стержнях, электрического напряжения в двухпроводной длинной линии, плоских волн в свободном пространстве.

**Решение волнового уравнения методом Даламбера.** Найти функцию  $y = (x, t)$ , непрерывную и имеющую непрерывные производные в области  $0 \leq t \leq \infty$ ,  $-\infty < x < +\infty$  и удовлетворяющую дифференциальному уравнению (IV.1.10) при следующих начальных и граничных условиях:

$$\begin{aligned} y(t, x)|_{t=0} &= f(x), & \dot{y}(t, x)|_{t=0} &= \varphi(x), \\ y(t, x)|_{x=0} &= y_0(t) & y(t, x)|_{x=l} &= y_l(t). \end{aligned} \quad (\text{IV.1.14})$$

Для решения волнового уравнения введем новые переменные:

$$\xi = x - ct; \quad \eta = x + ct.$$

В этом случае операции дифференцирования выражают формулами

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} &= \left( \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial x} \right)^2, \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} &= \left( \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial y} \right)^2. \end{aligned}$$

В результате преобразований получим уравнение в виде

$$\frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} = 0.$$

Интегрирование по переменной  $\eta$  дает

$$\frac{\partial y}{\partial \xi} = A(\xi).$$

После повторного интегрирования по переменной  $\xi$  найдем искомую функцию:

$$y = \int_0^{\xi} A_1(\beta) d\beta + A_2(\eta).$$

Обозначим первое слагаемое как  $f_1(\xi)$ , а второе как  $f_2(\eta)$  и, возвращаясь к исходным переменным, запишем решение волнового уравнения в виде

$$y = f_1(x - ct) + f_2(x + ct). \quad (\text{IV.1.15})$$

Для определения функций  $f_1$  и  $f_2$  воспользуемся начальными условиями (IV.1.14). Применяя их к решению (IV.1.15), получим систему уравнений

$$f_1(x) + f_2(x) = f(x), \quad -\frac{\partial f_1}{\partial \xi_1} \Big|_{t=0} + \frac{\partial f_2}{\partial \eta_1} \Big|_{t=0} = \frac{\varphi(x)}{c}. \quad (\text{IV.1.16})$$

Интегрируя второе из уравнений (IV.1.16), получим

$$f_2(x) - f_1(x) = \frac{1}{c} \int_0^x \varphi(z) dz + D.$$

Положив  $x=0$ , найдем выражение для постоянной  $D$ :

$$D = f_2(0) - f_1(0).$$

Пусть  $D=0$ . Тогда  $f_2(0) - f_1(0) = 0$ . В итоге сумма и разность функций  $f_1$  и  $f_2$  связаны с начальными условиями уравнениями:

$$f_2(x) + f_1(x) = f(x), \quad f_2(x) - f_1(x) = \frac{1}{c} \int_0^x \varphi(z) dz.$$

Решения этой системы:

$$f_1(x) = \frac{1}{2} \left[ f(x) - \frac{1}{c} \int_0^x \varphi(z) dz \right],$$

$$f_2(x) = \frac{1}{2} \left[ f(x) + \frac{1}{c} \int_0^x \varphi(z) dz \right].$$

Подставим эти решения в формулу (IV.1.15) и приведем к виду

$$y(x, t) = \frac{1}{2} [f(x - ct) + f(x + ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \varphi(z) dz. \quad (\text{IV.1.17})$$

Допустим, что в начальный момент времени скорость  $\varphi(x) = 0$ , а смещение  $y(x) = f(x)$ . Тогда решение (IV.1.17) следующее:

$$y(x, t) = \frac{1}{2} [f(x - ct) + f(x + ct)]. \quad (\text{IV.1.18})$$

Рассмотрим физический смысл первого из слагаемых (IV.1.18). Если считать, что  $y, x, t$  — координаты прямоугольной системы, то  $y = y(x, t)$  — уравнение поверхности в пространстве. Ордината этой поверхности представляет смещение точки струны с координатой  $x$  в момент времени  $t$ . Форма струны определяется

полностью для момента  $t=t_0$  уравнением  $y=y(x, t_0)$ . Геометрически это кривая, полученная в результате пересечения плоскости  $t=t_0$  и поверхности  $y=y(x, t)$ .

Для установления закона движения точки струны ( $x=x_0$ ) необходимо пересечь поверхность  $y(x, t)$  плоскостью  $x=x_0$ . Допустим, что  $x=d$ . В плоскости  $XOt$  построим прямую  $x-ct=d$ . Очевидно,  $y=f(x-ct)/2=f(d)/2$ , т. е. поверхность  $y=y(x, t)$  имеет одну и ту же ординату  $y$  для всех точек, лежащих в плоскости  $Xt$  на прямой  $x=ct+d$ , а именно такую, какую она имела для значения времени  $t=0$ . Это значит, что если в начальный момент времени для точки струны с координатой  $x=d$  смещение  $y=\frac{1}{2}f(d)$ , то и в последующие моменты времени ( $t>0$ ) такое же смещение будет для тех точек струны, координаты которых удовлетворяют уравнению  $x=ct+d$ . Смещение точек струны не остается на месте, а распространяется со скоростью  $c=\sqrt{T/\rho}$  в сторону  $+X$ .

Точно так же можно показать, что второе слагаемое  $y(x, t)=f_2(x+ct)/2$  представляет собой смещение точек, распространяющихся в сторону  $-X$  со скоростью  $c=\sqrt{T/\rho}$ .

Подобный анализ можно провести значительно проще. Допустим, что в некоторый начальный момент времени  $t=0$  возникло возмущение, форма которого задана функцией

$$y=a \text{ при } -b/2 < x < b/2,$$

$$y=0 \text{ при } \begin{cases} -\infty < x < -b/2, \\ -b/2 < x < +\infty, \end{cases}$$

причем в интервале  $-b/2 \leq x \leq b/2$

$$y=a=f_{10}+f_{20},$$

$$f_{10}=f_1(x-ct) \underset{x=x_0}{\overset{t=0}{=}} f_1(x_0), \quad f_{20}=f_2(x+ct) \underset{x=x_0}{\overset{t=0}{=}} f_2(x_0).$$

Что произойдет с этим возмущением к моменту времени  $\tau$ ? Очевидно, величина и форма импульса не изменятся. Они заданы начальными условиями, т. е. в момент времени  $t=0$ . Поэтому в силу однозначности функций  $f_1(x-ct)$  и  $f_2(x+ct)$  их аргументы окажутся также неизменными, равными начальным значениям:  $x \pm ct|_{t=0} = x_0$ .

Отсюда следует, что к моменту времени  $\tau$  координаты  $x_1$  и  $x_2$ , для которых функции  $f_1$  и  $f_2$  имеют значения  $f_{10}$  и  $f_{20}$ , определяются уравнениями

$$x_1 - c\tau = x_0, \quad \text{т. е. } x_1 = c\tau + x_0;$$

$$x_2 + c\tau = x_0, \quad \text{т. е. } x_2 = x_0 - c\tau.$$

Это значит, что импульс  $f_{10}$  переместится на расстояние  $c\tau$  в сторону положительных значений координаты  $X$ , а импульс  $f_{20}$  — на то же расстояние, но в противоположную сторону. Скорости перемещения этих импульсов одинаковы и равны  $c=\sqrt{T/\rho}$ .

**Решение волнового уравнения методом Фурье.** Предположим, что решение волнового уравнения состоит из произведения двух функций  $X(x)$  и  $T(t)$ :

$$y=X(x)T(t). \quad (\text{IV.1.19})$$

Подставим это решение в волновое уравнение (IV.1.10) и получим

$$T(t) \frac{d^2X(x)}{dx^2} - \frac{1}{c^2} X(x) \frac{d^2T(t)}{dt^2} = 0,$$

где  $c^2=T/\rho$ .

Разделив полученное выражение на произведение  $X(x)T(t)$ , преобразуем его к виду

$$\frac{1}{X(x)} \frac{d^2X(x)}{dx^2} = \frac{1}{c^2} \frac{1}{T(t)} \frac{d^2T(t)}{dt^2}.$$

Так как левая часть этого равенства зависит только от координаты  $x$ , а правая — от времени  $t$ , то их можно приравнять к некоторой постоянной —  $k^2$ :

$$\frac{1}{X(x)} \frac{d^2 X(x)}{dx^2} = -k^2, \quad \frac{1}{T(t)} \frac{d^2 T(t)}{dt^2} = -k^2,$$

т. е.

$$\frac{d^2 X(x)}{dx^2} + k^2 X(x) = 0, \quad \frac{d^2 T(t)}{dt^2} + k^2 c^2 T(t) = 0. \quad (\text{IV.1.20})$$

Иначе говоря, функции  $X(x)$  и  $T(t)$  удовлетворяют линейным однородным уравнениям второго порядка.

Частные решения второго и первого уравнений имеют вид:

$$T(t) = A' \cos(\omega t - \varphi_t), \quad (\text{IV.1.21})$$

$$X(x) = B' \cos(kx - \varphi_x), \quad (\text{IV.1.22})$$

где  $k = \omega/c$  — волновое число,  $\omega = kc$  — круговая частота.

Наконец, частное решение волнового уравнения определяется произведением:

$$\begin{aligned} y = X(x) T(t) &= A' B' \cos(kx - \varphi_x) \cos(\omega t - \varphi_t) = \\ &= \cos(kx - \varphi_x) [B \cos \omega t + C \sin \omega t]. \end{aligned} \quad (\text{IV.1.23})$$

Для определения четырех постоянных интегрирования  $k$ ,  $\varphi_x$ ,  $A$  и  $B$  воспользуемся граничными (IV.1.12) и начальными (IV.1.11) условиями. Пусть струна закреплена на концах. Тогда первое граничное условие  $y(x, t)|_{x=0} = 0$ , примененное к решению (IV.1.23), приводит для произвольного времени  $t$  к уравнению  $\cos(-\varphi_x) = 0$ . Отсюда следует, что  $\varphi_x = (2m + 1)\pi/2$ , и решение принимает вид

$$y = \sin kx (B \cos \omega t + C \sin \omega t). \quad (\text{IV.1.24})$$

Применяя к (IV.1.24) второе граничное условие  $y(x, t)|_{x=l} = 0$ , получим для любого времени  $t$  уравнение  $\sin kl = 0$ , из которого следуют допустимые значения волновых чисел

$$k_m = m \frac{\pi}{l}, \quad (\text{IV.1.25})$$

где  $m = 1, 2, 3, \dots$

Так как  $k = \omega/c$ , то из (IV.1.25) находим допустимые значения круговых частот:

$$\omega_m = \pi m c / l. \quad (\text{IV.1.26})$$

Таким образом, частные решения волнового уравнения струны с закрепленными концами имеют вид

$$y_m(x, t) = \sin(\pi m x / l) [B_m \cos(\pi m c t / l) + C_m \sin(\pi m c t / l)], \quad (\text{IV.1.27})$$

где  $m = 1, 2, 3, \dots$

Этот результат показывает, что струна с закрепленными концами может иметь только те частоты колебаний, которые кратны основной частоте, и только те волновые числа, которые кратны основному волновому числу:

$$\omega_m = m \omega_1, \quad k_m = m k_1, \quad (\text{IV.1.28})$$

где  $\omega_1 = \pi c / l$ ;  $k_1 = \pi / l$ ;  $m = 1, 2, 3, \dots$

Общим решением волнового уравнения струны является сумма всех его частных решений (IV.1.27):

$$\begin{aligned} y &= \sum_{m=1}^{\infty} \sin \frac{m\pi}{l} x \left( B_m \cos \frac{m\pi c}{l} t + C_m \sin \frac{m\pi c}{l} t \right) = \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \psi_m(x) \left( B_m \cos \frac{m\pi c}{l} t + C_m \sin \frac{m\pi c}{l} t \right), \end{aligned} \quad (\text{IV.1.29})$$

где  $\psi_m(x)$  обозначает четное множество функций:

$$\psi_m(x) = \sin \frac{m\pi}{l} x. \quad m=1, 2, 3, \dots$$

(фундаментальных функций колебаний струны). Отметим что они обладают свойством ортогональности:

$$\int_0^l \psi_m(x) \psi_n(x) dx = \int_0^l \sin \frac{m\pi}{l} x \sin \frac{n\pi}{l} x dx = \begin{cases} 0 & \text{при } m \neq n; \\ l/2 & \text{при } m = n. \end{cases}$$

Постоянные  $B_m$  и  $C_m$  в общем решении (IV.1.29) определим из начальных условий:

$$y(x, t)|_{t=0} = f(x), \quad \left. \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = \varphi(x). \quad (\text{IV.1.28}')$$

Здесь  $f(x)$  и  $\varphi(x)$  — заданные функции координаты  $x$ , непрерывные и имеющие в области  $0 \leq x \leq l$  кусочно-непрерывную производную. Чтобы воспользоваться вторым из начальных условий, пользуясь общим решением (IV.1.29), найдем выражение для скорости движения частиц струны:

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m\pi c}{l} \psi_m(x) \left( C_m \cos \frac{m\pi c}{l} t - B_m \sin \frac{m\pi c}{l} t \right) \quad (\text{IV.1.30})$$

и подставим в (IV.1.29) и (IV.1.30) вместо текущего времени  $t$  его начальное значение  $t=0$ . Тогда согласно начальным условиям (IV.1.28') получим:

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} B_m \psi_m(x), \quad \varphi(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m\pi c}{l} C_m \psi_m(x). \quad (\text{IV.1.31})$$

Умножим правые и левые части равенств (IV.1.31) на  $\psi_m(x) dx$  и выполним операцию интегрирования в пределах от 0 до  $l$ :

$$\begin{aligned} \int_0^l f(x) \psi_m(x) dx &= \sum_{m=1}^{\infty} B_m \int_0^l \psi_m(x) \psi_n(x) dx, \\ \int_0^l \varphi(x) \psi_n(x) dx &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m\pi c}{l} C_m \int_0^l \psi_m(x) \psi_n(x) dx. \end{aligned}$$

Согласно свойству ортогональности, все слагаемые сумм правых частей равенств с  $m \neq n$  равны нулю, а слагаемые, имеющие  $m=n$ , получают значения  $B_m l/2$  и  $C_m m\pi c/2$ :

$$\int_0^l f(x) \psi_m(x) dx = \frac{l}{2} B_m, \quad \int_0^l \varphi(x) \psi_m(x) dx = C_m \frac{m\pi c}{2}.$$

Отсюда следуют общие формулы для вычисления коэффициентов  $B_m$  и  $C_m$ :

$$B_m = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \psi_m(x) dx, \quad C_m = \frac{2}{m\pi c} \int_0^l \varphi(x) \psi_m(x) dx, \quad (\text{IV.1.32})$$

причем  $\psi_m(x) = \sin \frac{m\pi c}{l} x$ ;  $m=1, 2, 3, \dots$



Амплитуда колебаний, соответствующая частоте  $\omega_m = m\pi c/l$ , выражается формулой

$$A_m = \sqrt{B_m^2 + C_m^2} = \left[ \left( \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \psi_m(x) dx \right)^2 + \left( \frac{2}{m\pi c} \int_0^l \varphi(x) \psi_m(x) dx \right)^2 \right]^{1/2},$$

где  $f(x)$  и  $\varphi(x)$  — кусочно-непрерывные и дважды дифференцируемые функции.

В зависимости от вида начальных функций  $f(x)$  и  $\varphi(x)$  в струне будет реализовываться определенное распределение значений  $B_m$  и  $C_m$ . Так, например, если струна возбуждается посередине щипком, то скорость в начальный момент времени для всех точек струны равна нулю, т. е.  $\varphi(x) = 0$ . Если подставить в (IV.1.32) это значение начальной скорости, то получим  $C_m = 0$ .

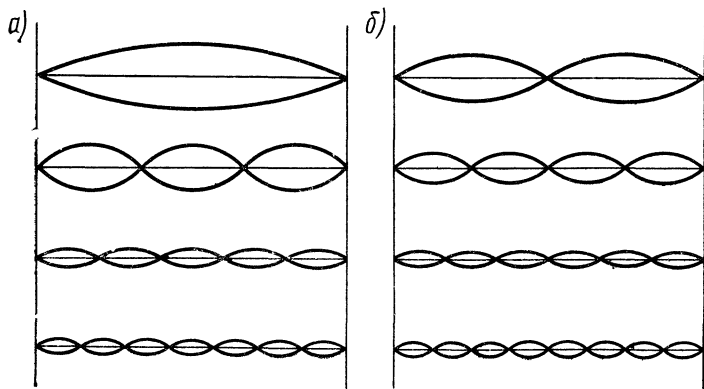


Рис. IV.1.2

Таким образом, согласно (IV.1.32) колебания струны определяются членами, содержащими только четные периодические функции времени:

$$y = \sum_{m=1}^{\infty} \sin \frac{m\pi}{l} x \cos \frac{m\pi c}{l} t B_m,$$

причем будут реализоваться только те частоты, которые отвечают нечетным значениям номера частоты (рис. IV.1.2, а).

Если начальные условия соответствуют удару посередине струны, то начальные смещения частиц струны будут равны нулю, поэтому все коэффициенты  $B_m$  обращаются в нули. В решении останутся только члены с коэффициентами  $C_m$ :

$$y = \sum_{m=1}^{\infty} \sin \frac{m\pi}{l} x C_m \sin \frac{m\pi c}{l} t,$$

причем реализоваться будут только такие частоты, которые соответствуют четным значениям  $m$  (рис. IV.1.2, б).

Пример. Пусть струна возбуждается щипком в средней части. В этом случае начальными условиями будут

$$y(x, t)|_{t=0} = f(x) = \begin{cases} 2hx/l & \text{при } 0 \leq x \leq l/2, \\ 2h(l-x)/l & \text{при } l/2 < x \leq l, \end{cases}$$

$$y(x, t)|_{t=0} = 0.$$

Этот случай соответствует тому, что коэффициенты  $C_m$  ряда Фурье равны нулю. Для вычисления коэффициентов  $B_m$  разобьем предел интегрирования на

две части — от 0 до  $l/2$  и от  $l/2$  до  $l$ :

$$B_m = \frac{2}{l} \int_0^{l/2} \frac{2h}{l} x \sin \frac{m\pi}{l} x dx + \frac{2}{l} \int_{l/2}^l \frac{2h}{l} (l-x) \sin \frac{m\pi}{l} x dx =$$

$$= \frac{8h}{m^2\pi} \sin \frac{m\pi}{2}; \quad m = 1, 2, 3, \dots;$$

$$B_1 = \frac{8h}{\pi^2}; \quad B_2 = 0; \quad B_3 = \frac{8h}{3^2\pi^2}; \quad B_4 = 0; \quad B_5 = \frac{8h}{5^2\pi^2}, \dots,$$

т. е. четные гармоники исчезают, а амплитуды нечетных гармоник уменьшаются обратно пропорционально квадрату нечетных чисел.

**Энергия колебаний струны** состоит из кинетической и потенциальной. Для вычисления кинетической энергии допустим, что линейная плотность струны  $\rho$ . Тогда масса элемента длиной  $dl$  равна  $dm = \rho dl$ . Если скорость этого элемента длины  $\partial y / \partial t$ , то его кинетическая энергия

$$dW_k = \frac{\rho dl}{2} \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right)^2. \quad (\text{IV.1.33})$$

Полная кинетическая энергия

$$W_k = \int_0^l \frac{\rho}{2} dl \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 \approx \int_0^l \frac{\rho}{2} \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 dx. \quad (\text{IV.1.34})$$

Потенциальная энергия элемента струны составляет ту работу, которую надо затратить для придания элементу  $dl$  данной формы в том месте, где находится элемент. Для вычисления этой работы введем безразмерную величину  $\gamma$ , так что промежуточное смещение элемента равно  $y' = \gamma y$ , где  $\gamma$  — коэффициент формы, изменяющейся от 0 до 1. Сила, против которой производится работа при изменении формы струны в данном месте, равна проекции сил натяжения на ось  $Y$ :

$$T_y = T \frac{\partial^2 y'}{\partial x^2} dx. \quad (\text{IV.1.35})$$

Подставляя в (IV.1.35) значение промежуточного смещения  $y' = \gamma y$ , получаем

$$T_y = -\delta F_y = T \frac{\partial^2 (\gamma y)}{\partial x^2} dx.$$

Элементарная работа при изменении смещения на  $\delta y' = y \delta \gamma$

$$d(dW_n) = \delta F_y \delta y' = -T \frac{\partial^2 (\gamma y)}{\partial x^2} y' \delta \gamma dx,$$

а работа при полном смещении

$$dW = \left[ \int_0^l T \frac{\partial^2 (\gamma y)}{\partial x^2} y \gamma \delta \gamma \right] dx = -T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \frac{y}{2} dx.$$

Так как работа равна изменению энергии, то потенциальная энергия всей струны

$$W_{\text{п}} = -\frac{T}{2} \int_0^l \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} y dx. \quad (\text{IV.1.36})$$

Интегрируя (IV.1.36) по частям, получаем

$$W_{\text{п}} = \frac{T}{2} \int_0^l \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 dx. \quad (\text{IV.1.37})$$

Полная энергия струны, равная сумме кинетической и потенциальной энергий, выразится в виде

$$W = W_{\text{п}} + W_{\text{к}} = \frac{\rho}{2} \int_0^l \left[ \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 + \frac{T}{\rho} \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \right] dx. \quad (\text{IV.1.38})$$

Подставляя в (IV.1.38) выражения для  $y$  в виде ряда

$$y = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \sin \frac{m\pi x}{l} \cos \left( \frac{m\pi c}{l} t - \varphi t \right),$$

получаем

$$W = \sum_{m=1}^{\infty} W_m = \sum_{m=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{2} \frac{l\rho}{2} \left( \frac{m\pi c}{l} \right)^2 A_m^2 \right], \quad (\text{IV.1.39})$$

где  $W = \rho l \omega_m^2 A_m^2$  — энергия колебаний осциллятора, имеющего массу  $\rho l/2$  и колеблющегося с частотой  $\omega_m$  и амплитудой  $A_m$ ;  $m = 1, 2, 3, \dots$ ;  $\omega_m = m\pi c/l$ .

Формула (IV.1.39) дает следующий закон энергии колебания струны: энергия колебаний струны равна сумме энергий осцилляторов с массами, равными половине массы струны, и частотами, равными собственным частотам струны.

Энергия  $W_m$ , приходящаяся на каждую гармоническую составляющую колебаний, пропорциональна квадрату частоты и квадрату амплитуды. Так как с ростом номера гармоники амплитуда уменьшается, как  $1/m^2$ , а частота растет, как  $m$ , то энергия, приходящаяся на  $m$ -й оберто́н, обратно пропорциональна номеру гармоники в квадрате.

**Колебания струны с учетом сил трения.** Если силами сопротивления движению струны пренебречь нельзя, то в волновом уравнении необходимо учитывать член, пропорциональный скорости  $\partial y/\partial t$ . В этом случае волновое уравнение имеет вид

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{r}{\rho} \frac{\partial y}{\partial t} - \frac{T}{\rho} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0.$$

Граничные и начальные условия останутся прежними. Решение данного уравнения будем искать в виде произведения двух функций:  $X(x)$  и  $T(t)$ . Путем прямой подстановки легко показать, что функ-

ция  $X(x)$  удовлетворяет уравнению гармонических колебаний, а функция  $T(t)$  — уравнению затухающих колебаний с коэффициентом затухания  $\delta = r/(2\rho)$ . В результате использования начальных и граничных условий можно получить общее решение в виде

$$y = \sum_{m=1}^{\infty} \sin \frac{m\pi}{l} x (\bar{B}_m \cos \bar{\omega}_m t + \bar{C}_m \sin \bar{\omega}_m t), \quad (\text{IV.1.40})$$

где  $\bar{B}_m$  и  $\bar{C}_m$  — амплитуды затухающих колебаний:  $\bar{B}_m = B_m e^{-\delta m t}$ ,

$$\bar{C}_m = C_m e^{-\delta m t}; \quad \delta_m = \frac{r_m}{2\rho}; \quad \bar{\omega}_m = \sqrt{\left(\frac{m\pi c}{l}\right)^2 + \left(\frac{r_m}{2\rho}\right)^2} = \sqrt{\omega_m^2 - \delta_m^2}.$$

Энергия колебаний струны с учетом сопротивления потерь определяется формулой (IV.1.39), где в качестве амплитуды  $A_m$  следует иметь в виду амплитуду затухающих колебаний, т. е. энергия колебаний струны с учетом сил трения убывает со временем по экспоненциальному закону.

**Формы колебаний струны и способ возбуждения свободных колебаний.** В заключение остановимся на физическом истолковании полученных результатов.

Функция  $y_m(x, t)$  может быть записана в виде

$$y_m = \bar{A}_m \sin \frac{m\pi}{l} x \cos(\bar{\omega}_m t - \varphi_m). \quad (\text{IV.1.41})$$

Отсюда следует, что каждая точка струны совершает затухающие колебания (IV.1.41) с амплитудами  $A_m e^{-[r_m/2\rho]t} \left| \sin \frac{m\pi}{l} x \right|$  и частотами  $\bar{\omega}_m = \sqrt{\omega_m^2 - \delta_m^2} \approx \omega_m = m\pi c/l$ .

Волновой процесс, описываемый функцией (IV.1.41), называют *стоячей волной*. Вся струна при наличии стоячих волн  $m$ -го порядка разделена на отрезки равной длины неподвижными точками (узлами). Координаты узлов определяются корнями уравнения

$$\sin \frac{m\pi}{l} x = 0$$

и имеют значения

$$x_{mn} = \frac{n}{m} l; \quad n = 1, 2, 3, \dots, m-1$$

( $m-1$  — число узловых точек).

Между узлами расположены точки с наибольшей амплитудой колебаний — пучности. Координаты пучностей соответствуют числам

$$x_{mn'} = \left(\frac{2n'-1}{2m}\right) l; \quad n' = 1, 2, 3, \dots, m$$

( $m$  — число пучностей).

Каждой собственной частоте  $\omega_m$  отвечает своя форма колебаний. При этом звучание струны воспринимается как чистый тон. Высота тона тем больше, чем больше частота.

Струна, возбуждаемая тем или иным способом, колеблется, имея определенный набор собственных частот. Наибольшая энергия колебаний струны соответствует основной частоте. Энергия высших частот тем меньше, чем больше номер частоты. В соответствии с этим струна излучает звук, характеризуемый основным тоном и обертонами. Одновременное наложение близких частот воспринимается как биение звука. Обертоны создают тональную окраску основного тона — *тембр*, характерный для звучания того или иного струнного музыкального инструмента.

Способ возбуждения струны сообщает струнному музыкальному инструменту специфику звучания. Так, например, при возбуждении струны щипком энергия  $m$ -й гармоники обратно пропорциональна квадрату номера гармоники.

Если струна возбуждается ударом в точке  $l_1$  с импульсом  $K$ , то смещение определится формулой (без учета затухания)

$$y(x, t) = \frac{2K}{\pi l_1 \rho} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \sin \frac{m\pi l_1}{l} \sin \frac{m\pi x}{l} \sin \frac{m\pi c}{l} t,$$

а энергия, приходящаяся на отдельную гармонику, выразится соотношением

$$W_m = \frac{K^2}{\rho l} \sin^2 \left( \frac{m\pi l_1}{l} \right),$$

т. е. энергии различных гармоник, для которых интервал длины струны ударом меньше, чем расстояние между узлами, будут несущественно различаться между собой. В результате этого тон струны будет насыщен обертонами. В этом легко убедиться, если струну монохорда возбудить ударом лезвия ножа.

Если струна возбуждается ударом в точке  $x = l_1$  плоским жестким молоточком шириной  $2b$ , то колебания определяются функцией

$$y(x, t) = \frac{4v_0 l}{\pi^2 l_1} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} \sin \frac{m\pi l_1}{l} \sin \frac{m\pi b}{l} \sin \frac{m\pi c}{l} t,$$

а энергия отдельной гармоники — формулой

$$W_m = \frac{4\rho l v_0^2}{m^2 \pi^2} \sin^2 \left( \frac{m\pi l_1}{l} \right) \sin^2 \left( \frac{m\pi b}{l} \right).$$

При ударе струны выпуклым молоточком шириной  $2b$  в центре интервала  $x_1 - b < x < x_1 + b$  удар сообщает струне большую скорость, чем в крайних точках этого интервала; начальная скорость может быть представлена функцией

$$\frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = \begin{cases} v_0 \cos \left( \frac{x - l_1}{b} \frac{\pi}{2} \right) & \text{при } x - l_1 < b, \\ 0 & \text{при } x - l_1 > b. \end{cases} \quad (\text{IV.1.42})$$

Решение волнового уравнения струны, удовлетворяющее начальному условию (IV.1.42), имеет вид

$$y(x, t) = \frac{8v_0 b}{\pi^2 l_1} \sum_0^{\infty} \frac{1}{m} \frac{\cos \frac{m\pi b}{l} \sin \frac{m\pi l_1}{l}}{1 - (2mb/l)^2} \sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right) \sin\left(\frac{m\pi c}{l} t\right).$$

В этом случае энергия колебаний струны состоит из суммы энергий, соответствующих отдельным гармоническим составляющим колебаний струны:  $W = \sum W_m$ , причем

$$W_m = \frac{16v_0^2 b^2 \rho}{l\pi^2} \frac{1}{1 - (2mb/l)^2} \cos^2\left(\frac{m\pi b}{l}\right) \sin^2\left(\frac{m\pi l_1}{l}\right).$$

Если струна возбуждается не идеально жестким молоточком, то колебания определяются не начальной скоростью, а силой, изменяющейся во времени. Это соответствует тому, что задано волновое уравнение с правой частью

$$f(x, t) = \begin{cases} F_0 \cos\left(\frac{x-l_1}{b} \frac{\pi}{2}\right) \sin \frac{\pi}{\tau} t & \text{при } \frac{x-l_1}{b} < 1, 0 \leq t \leq \tau, \\ 0 & \text{при } \frac{x-l_1}{b} > 1, t > \tau. \end{cases}$$

Решение этого уравнения представляется в виде

$$y(x, t) = \frac{16F_0 \tau b}{\pi^2 \rho l_1} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \frac{\cos \frac{m\pi b}{l} \cos \frac{\omega_m \tau}{2} \sin \frac{m\pi l_1}{l}}{[1 - (2mb/l)^2] [1 - (ml_1 \omega_m \tau/l)^2]} \sin \frac{m\pi x}{l} \sin \omega_m \left(t - \frac{\tau}{2}\right).$$

Приведенные примеры показывают, что характер удара оказывает значительное влияние на энергию высоких тонов струны. Присутствие множителя  $\sin(m\pi l_1/l)$  показывает, что  $m$ -я гармоника не возбуждается, если центр удара приходится на один из ее узлов.

Характер звучания имеет неприятный оттенок, если наряду с основным тоном возбуждаются обертоны высоких частот. При этом возникают низкочастотные резонансные тоны, вызывающие биения звука. Число этих биений в единицу времени достаточно велико, и одновременное сочетание звуков создает ощущение неполной согласованности. Другими словами, наступает диссонанс; обычно это возникает, когда возбуждаются 7-я, 8-я гармоники и более высокие. Наличие нижних обертонов вызывает ощущение приятной полноты звучания. Поэтому чтобы уменьшить, например, в рояле влияние высоких обертонов, располагают молоточки так, чтобы их удары приходились в районе 7-го и 8-го обертонов, а чтобы увеличить энергию нижних обертонов, подбирают соответствующим образом ширину и жесткость каждого молоточка.