§ IV.2. ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ СТРУНЫ

Пусть на струну действует вынуждающая поперечная сила $F(x, t)$. Тогда на элемент струны Δx действует сила

$$\Delta F(x, t) = f_1(x, t)\,\Delta x,$$

где $f_1(x, t) = \frac{\partial F(x, t)}{\partial x}$.

Колебания струны под действием гармонической силы. Рассмотрим сначала решение неоднородного дифференциального уравнения, описывающего колебание струны (IV.1.9), когда функция $f_1(x, t)$ имеет гармоническую зависимость от времени:

$$f_1(x, t) = \frac{\partial F}{\partial x} = f(x)\,e^{j\omega t}.$$

В этом случае уравнение (IV.1.9) преобразуется:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + 2\delta\frac{\partial y}{\partial t} - c_0^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = f(x)\,e^{j\omega t}, \qquad \text{(IV.2.1)}$$

где $\delta = r/(2\rho)$ — коэффициент затухания колебаний струны; $c_0 = \sqrt{T/\rho}$ — фазовая скорость распространения изгибных волн в струне; $f(x) = f_1(x)/\rho$ — ускорение, получаемое массой элемента струны длиной $dx/dm = \rho\,dx$, когда на нее действует сила $dF(x) = f(x)\,dx$.

Допустим, что струна закреплена на концах. Это соответствует граничным условиям

$$y(0, t) = y(l, t) = 0. \qquad \text{(IV.2.2)}$$

Решение уравнения (IV.2.1) будем искать в виде суммы:

$$y(x, t) = y_1(x, t) + y_2(x, t), \qquad \text{(IV.2.3)}$$

где $y(x, t)$ — общее решение однородного уравнения

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t} + 2\delta\frac{\partial y}{\partial t} - c_0^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0, \qquad \text{(IV.2.4)}$$

а $y_2(x, t)$ — частное решение уравнения (IV.2.1).

Общее решение этого уравнения имеет характер затухающих колебаний:

$$y_1(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\delta_m t}\,\psi_m(x)\,A_m\cos(\omega_m t - \varphi_m), \qquad \text{(IV.2.5)}$$

где $\delta_m = r_m/(2\rho)$ — коэффициент затухания колебаний с частотой $\omega_m = m\pi c/l$; $\psi_m(x)$ — фундаментальные функции струны; A_m — амплитуда колебаний; φ_m — фаза этих колебаний.

Установившиеся колебания. Если время действия внешней силы значительно больше, чем время затухания основного тона $t \gg \tau = 1/\delta$, то к моменту времени t собственные колебания прекратятся и останутся только вынужденные. Частота вынужденных колебаний при этом равна частоте вынуждающей силы, а амплитуда колебаний отдельных точек струны зависит от амплитуды силы. Эту зависимость можно найти, решив уравнение струны с правой частью (IV.2.1). Для получения этого решения заметим, что смещение должно зависеть от времени по гармоническому закону с частотой вынуждающей силы

$$y_2(x,\ t) = y(x)\, e^{j\omega t}. \qquad \text{(IV.2.6)}$$

После подстановки функции $y_2(x,\ t)$ из (IV.2.6) в дифференциальное уравнение с правой частью получим уравнение для определения функции

$$(-\omega^2 + 2\delta\omega)\, y(x) - c_0^2 \frac{d^2 y(x)}{dx^2} - f(x) = 0. \qquad \text{(IV.2.7)}$$

Решение уравнения (IV.2.7) будем искать в виде ряда Фурье по фундаментальным функциям колебаний струны. С этой целью подставим в это уравнение $\tilde{y}(x)$ и $f(x)$ в форме рядов Фурье:

$$y(x) = \sum_{m=1}^{\infty} y_m \psi_m(x), \quad f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} f_m \psi_m(x), \qquad \text{(IV.2.8)}$$

где $\psi_m(x) = \sin \frac{m\pi}{l} x$; f_m — коэффициенты ряда Фурье, равные

$$f_m = \frac{2}{l} \int_0^l f(\xi) \sin \frac{m\pi}{l} \xi\, d\xi. \qquad \text{(IV.2.9)}$$

В результате несложных преобразований получим

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \left[-\omega^2 + j2\delta\omega + c_0^2 \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 \right] y_m - f_m \right\} \sin \frac{m\pi x}{l} = 0. \qquad \text{(IV.2.10)}$$

Уравнение (IV.2.10) может выполняться для любых значений координаты $0 \leqslant x \leqslant l$, для которых $\sin(m\pi x/l) \neq 0$. Отсюда следует, что для любого целого m выполняется равенство нулю выражений, заключенных в фигурные скобки, т. е.

$$\left[-\omega^2 + c_0^2 \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 + j2\delta\omega \right] y_m - f_m = 0, \qquad \text{(IV.2.11)}$$

где $m = 1, 2, 3, \ldots$

В этих уравнениях f_m определены, если задана в явном виде силовая функция $f(x)$. Поэтому их можно рассматривать как уравнения для коэффициентов разложения $y(x)$ по фундаментальным функциям:

$$y_m = \frac{f_m}{(m^2\pi^2c^2/l^2 - \omega^2) + j2\delta\omega}. \qquad \text{(IV.2.12)}$$

Таким образом, искомая функция $y(x)$ представляется в виде ряда:

$$y(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{f_m}{m^2\pi^2c^2/l^2 - \omega^2 + j2\delta\omega} \sin \frac{m\pi}{l} x, \qquad \text{(IV.2.13)}$$

где $f_m = \frac{2}{l}\int\limits_0^l f(\xi)\sin\frac{m\pi}{l}\xi\,d\xi$; $\frac{m^2\pi^2c^2}{l^2} = \omega_m^2$ — квадрат круговой частоты m-й моды колебаний.

Смещение участка струны с координатой x при установившихся колебаниях определяют гармонической функцией частоты ω вынуждающей силы. Амплитуда смещения зависит от соотношения частот ω_m и ω величины f_m и координаты x:

$$y(x,\ t) = \left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{f_m}{\omega_m^2 - \omega^2 + j2\delta\omega}\sin\frac{m\pi}{l}x\right)\cos\omega t. \qquad \text{(IV.2.14)}$$

Если частота вынуждающей силы совпадает с частотой одного из обертонов ($\omega = \omega_n$), то из всех слагаемых суммы (IV.2.14) наибольшее значение амплитуды имеет слагаемое с $m = n$:

$$y(x,\ t) = \frac{f_n}{j2\delta\omega}\sin\frac{n\pi}{l}x\cos\omega t + \text{слагаемые второго порядка.} \qquad \text{(IV.2.15)}$$

Скорость смещения при вынужденных колебаниях струны выражается рядом

$$v(x,\ t) = \frac{\partial y_2}{\partial t} = \left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{f_m}{z_m}\sin\frac{m\pi}{l}x\right)\cos\omega t, \qquad \text{(IV.2.16)}$$

где z_m — комплексное механическое сопротивление, приходящееся на m-ю форму колебаний:

$$z_m = 2\delta(1 + jQ_m\gamma_m). \qquad \text{(IV.2.17)}$$

Здесь $Q_m = \frac{\omega_m}{2\delta_m} = \frac{m\pi c}{2l\delta_m}$ — добротность; $\gamma_m = \left(\frac{\omega}{\omega_m} - \frac{\omega_m}{\omega}\right) = \frac{l\omega}{m\pi}\left(1 - \frac{m^2\pi^2}{l^2\omega^2}\right)$ — частотная постоянная моды колебаний струны; f_m определяется действующей силой $\frac{f_1(x)}{\rho} = f(x)$:

$$f_m = \frac{2}{l}\int\limits_0^l f(x)\sin\frac{m\pi x}{l}dx = \frac{2}{l\rho}\int\limits_0^l f_1(x)\sin\frac{m\pi x}{l}dx =$$

$$= \frac{1}{M}\int\limits_0^l f_1(x)\sin\frac{m\pi x}{l}dx;\quad M \text{ — половина массы струны.}$$

Допустим, сила $f_1(x)$ задана в точке $f_1(x) = f_0\delta(x - x_0)$, причем

$$\delta(x - x_0) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \neq x_0, \\ 1 & \text{при } x = x_0. \end{cases}$$

Тогда интеграл силовой функции отличен от нуля в окрестности точки приложения силы:

$$\int\limits_0^l f_1(x)\sin\frac{m\pi x}{l}dx = f_0\int\limits_{x_0 - \Delta x}^{x_0 + \Delta x}\delta(x - x_0)\sin\frac{m\pi x}{l}dx = f_0\sin\frac{m\pi x_0}{l}.$$

Частные случаи. 1. Периодическая сила действует в окрестности точки с координатой x_0:

$$f(x)=\frac{1}{\rho}f_1(x)=\frac{1}{\rho}f_0\delta(x-x_0),$$

причем $\delta(x-x_0)$ — импульсная δ-функция.

Заметим, что для δ-функции выполняется соотношение

$$\int_a^b f(\xi)\,\delta(\xi-x)\,d\xi=\begin{cases}0 & \text{при } x<a,\\ 1/2f(x) & \text{при } x=a,\\ f(x) & \text{при } a<x<b.\end{cases}$$

В этом случае

$$f_m=\frac{2}{l}\int_0^l\frac{1}{\rho}f_0\delta(\xi-x_0)\sin\frac{m\pi\xi}{l}\,d\xi=\frac{2}{l\rho}f_0\int_0^l\sin\frac{m\pi\xi}{l}\,d\xi=\frac{2}{l\rho}f_0\sin\frac{m\pi x_0}{l}.$$

Подставляя это выражение в (IV.2.16), получаем:

$$v(x,\ t)=\sin\frac{m\pi x_0}{l}\sin\frac{m\pi x}{l}\,\frac{2f_0/(\rho l)}{2\delta(1+jQ_m\gamma_m)}\cos\omega_m t,$$

$$Q_m=\frac{\omega_m}{2\delta}=\frac{m\pi c_0}{l}\,\frac{\rho}{r}=\frac{m\pi c_0\rho}{rl},\qquad \gamma_m=\frac{\omega l}{m\pi c_0}-\frac{m\pi c_0}{\omega l}.$$

Скорость на резонансной частоте максимальна по амплитуде и совпадает по фазе с действующей силой:

$$v(x,\ t)_{\text{рез}}\approx\frac{(2/\rho l)\,f_0\sin(m\pi x/l)}{2\delta}\sin\frac{m\pi x}{l}\cos\omega t=\frac{2}{rl}f_0\sin\left(\frac{m\pi x_0}{l}\right)\sin\frac{m\pi x}{l}\cos\omega t.$$

2. Сила действует на участок струны $x_1\leqslant x\leqslant x_1+\Delta x$:

$$f_1(x)=f_0\quad\text{при}\quad x_1\leqslant x\leqslant x_1+\Delta x,$$
$$f_2(x)=0\quad\text{при}\quad x<x_1\ \text{и}\ x>x_1+\Delta x.$$

Тогда

$$f_m=\frac{1}{\rho}f_0\frac{2}{l}\int_{x_1}^{x_1+\Delta x}\sin\frac{m\pi\xi}{l}\,d\xi=\frac{2f_0}{\rho l}\,\frac{l}{m\pi}\left(-\cos\frac{m\pi\xi}{l}\right)\Big|_{x_1}^{x_1+\Delta x}=$$

$$=\frac{2f_0}{\rho m\pi}\left(\cos\frac{m\pi x_1}{l}-\cos\left[\frac{m\pi}{l}(x_1+\Delta x)\right]\right)=$$

$$=\frac{2f_0}{\rho m\pi}2\sin\frac{m\pi}{l}\left(x_1+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{m\pi\,\Delta x}{l}\approx\frac{4f_0}{\rho l}\Delta x\sin\left[\frac{m\pi}{l}\left(x_1+\frac{\Delta x}{2}\right)\right].$$

Подставляя эту формулу в выражение для скорости колебаний, получаем

$$v(x,\ t)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{4f_0}{\rho l}\Delta x\,\frac{\sin\left[\left(x_1+\frac{\Delta x}{2}\right)\frac{m\pi}{l}\right]}{(r/\rho)(1+jQ_m\gamma_m)}\sin\frac{m\pi}{l}x\cos\omega t.$$

Если частота ω совпадает с частотой ω_m, то $\gamma_m=\omega/\omega_m-\omega_m/\omega=0$ и находим выражение для колебательной скорости при частоте резонанса:

$$v_{\text{рез}}(x,\ t)\approx\frac{4f_0}{\delta\rho l}\Delta x\sin\left[\frac{m\pi}{l}\left(x_1+\frac{\Delta x}{2}\right)\right]\sin\frac{m\pi}{l}x\cos\omega_m t$$