§ IV.3. ПРОДОЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СТЕРЖНЕЙ

Наряду со струной в акустике широко используют и другие одномерные колебательные системы. К ним относят стержни, т. е. упругие тела удлиненной цилиндрической формы. Концы стержня обычно ограничены плоскостями, перпендикулярными образующей; центры инерции поперечных сечений расположены на прямой линии, называемой осью стержня.

Колебания стержней бывают трех видов: продольные, крутильные и поперечные. Исследуем продольные колебания, т. е. колебания стержней, когда ось неподвижна, а поперечные сечения, оставаясь плоскими, колеблются вдоль оси. Необходимо заметить, что при растяжении стержня происходит уменьшение его поперечных линейных размеров и точки поперечных сечений фактически перемещаются не только вдоль оси, но и радиально. Однако если линейные размеры поперечных сечений значительно меньше общей длины стержня и стержень целиком подвергается растяжению, то продольное перемещение сечений стержня значительно больше, чем поперечно-радиальное перемещение частиц. Таким образом, при низкочастотных продольных колебаниях длинных стержней поперечные движения частиц можно не учитывать.

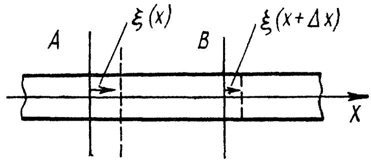

Рис. IV.3.1

Вывод дифференциального уравнения. Предположим, что приложенные к стержню силы направлены вдоль его оси. Обозначим $m_1(x)$ — погонную плотность стержня, E — модуль Юнга и $S(x)$ — площадь поперечного сечения. Будем характеризовать процесс продольных колебаний функцией $\xi(x, t)$, представляющей в момент времени t смещение частиц стержня, имевших в положении равновесия координату x. Выбранная здесь геометрическая переменная называется переменной Лагранжа.

Выделим поперечными сечениями A_x и $B_{x+\Delta x}$ (рис. IV.3.1) малый участок длины стержня и найдем относительное удлинение элемента x, $x+\Delta x$ в момент времени t в переменных Лагранжа. Координаты концов этого элемента в момент t имеют значения

$$x+\xi(x, t), \quad x+\Delta x+\xi(x+\Delta x, t),$$

а относительное удлинение равно

$$\frac{[\Delta x+\xi(x+\Delta x, t)-\xi(x, t)]-\Delta x}{\Delta x}=\frac{\partial\xi(x+\theta\,\Delta x, t)}{\partial x}$$

при $0 \leqslant \theta \leqslant 1$.

Рассмотрим условие равновесия сил, действующих на элемент стержня x, $x+\Delta x$ при его продольных колебаниях. Этими силами могут быть:

1) силы продольной внешней нагрузки. Если обозначить предел отношения внешней силы к элементу длины $f(x)$, то продольная

внешняя сила, действующая на элемент стержня длиной Δx, равна

$$\Delta F_1 = f(x,\ t)\,\Delta x; \tag{IV.3.1}$$

2) результирующая сил упругости со стороны частей стержня, расположенных левее сечения A, равная

$$\Delta F(x,\ t) = -E(x)\,S(x)\,\frac{\partial \xi(x,\ t)}{\partial x}\Big|_x, \tag{IV.3.2}$$

и со стороны частей стержня, расположенных правее сечения B,

$$\Delta F(x+\Delta x,\ t) = E(x)\,S(x)\,\frac{\partial \xi}{\partial x}\Big|_{x+\Delta x}, \tag{IV.3.3}$$

где $\frac{\partial \xi(x,\ t)}{\partial x}\Big|_x$ — относительная деформация за счет смещения сечения с координатой x; $\frac{\partial \xi}{\partial x}\Big|_{x+\Delta x}$ — то же, но для сечения с координатой $x+\Delta x$.

Таким образом, результирующая сил упругости равна

$$\Delta F' = \left[E(x)\,S(x)\,\frac{\partial \xi}{\partial x}\right]_{|x+\Delta x} - \left[E(x)\,S(x)\,\frac{\partial \xi}{\partial x}\right]_{|x}; \tag{IV.3.4}$$

3) силы трения, пропорциональные скорости $\dot{\xi}$:

$$\Delta F_m = -r(x)\,\dot{\xi}\,\Delta x, \tag{IV.3.5}$$

где $r(x)$ — механическое сопротивление единицы длины стержня.

Результирующая внешней силы, сил упругости и силы трения приложена к центру инерции отрезка стержня длиной Δx, и согласно второму закону динамики эти силы вызовут ускоренное движение массы участка $m_1\Delta x$, так что выполняется уравнение

$$m_1\Delta x\,\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = f(x,\ t)\,\Delta x + \left[\left(ES\,\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)_{|x+\Delta x} - \left(ES\,\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)_{|x}\right] - r(x)\,\Delta x\,\frac{\partial \xi}{\partial t}. \tag{IV.3.6}$$

В результате перехода к пределу $\Delta x \to 0$ получаем дифференциальное уравнение продольных колебаний стержня:

$$m_1(x)\,\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + r(x)\,\frac{\partial \xi}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left[E(x)\,S(x)\,\frac{\partial \xi}{\partial x}\right] = f(x,\ t), \tag{IV.3.7}$$

где E и S могут быть функциями от x.

К этому уравнению необходимо добавить граничные и начальные условия:

$$\xi(x,\ t)_{|x=0} = f_0(t), \quad \xi(x,t)_{|x=l} = f_l(t), \tag{IV.3.8}$$

$$\xi(x,\ t)_{|t=0} = f(x), \quad \frac{\partial \xi(x,\ t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = \varphi(x). \tag{IV.3.9}$$

Уравнение (IV.3.7) аналогично волновому уравнению струны. Поэтому методы его решения могут быть применимы к данному случаю, а если окажется, что и граничные условия аналогичны граничным условиям задачи о колебаниях струны, то решение соответствующей задачи о колебаниях струны может быть полностью использовано как решение задачи о колебаниях стержня.

В акустике наряду с обычными приемами решения краевых задач о вынужденных колебаниях (см. § IV.2) широко используют импедансные методы, особенно удобные, когда на колебательную систему действуют внешние периодические силы, сосредоточенные в заданном сечении, в частности на краях системы. В этом случае задача о вынужденных колебаниях стержня в установившемся режиме сводится к решению однородного дифференциального уравнения, т. е. волнового уравнения (IV.3.7) без правой части, когда на одной из границ заданы скорость $\dot{\xi}$ и сила F_l как функции от времени:

$$\frac{\partial \xi}{\partial t}\Big|_{x=0} = \dot{\xi}_0(t), \quad F(x, t)|_{x=0} = F_0(t). \tag{IV.3.10}$$

Кроме того, заданы начальные условия:

$$F(x, t)|_{t=0} = F_0(x), \quad \dot{\xi}(x, t)|_{t=0} = \dot{\xi}_0(x). \tag{IV.3.10'}$$

Часто вместо силы $F_0(t)$ на границе задают механический импеданс на конце стержня в виде комплексной функции отношения силы $F_0(t)$ к скорости $\dot{\xi}_0(x)$, т. е. вместо второго граничного условия (IV.3.10) в задаче задан механический импеданс на конце стержня

$$z(t) = \frac{F_0(t)}{\dot{\xi}_0(t)}. \tag{IV.3.11}$$

В этом случае вместо волнового уравнения

$$m_1 \frac{\partial \dot{\xi}}{\partial t} + r_1 \dot{\xi} - \frac{\partial}{\partial x}\left[ES \frac{\partial}{\partial x} \int_0^t \dot{\xi}(\tau)\, d\tau\right] = 0 \tag{IV.3.12}$$

при граничных условиях (IV.3.10) удобнее решать два дифференциальных уравнения относительно двух функций: скорости смещения $\dot{\xi}(x, t)$ и силы $F(x, t)$.

Для получения этих уравнений обозначим выражение, содержащееся в квадратных скобках (IV.3.12), как

$$-F(x, t) = E(x)\, S(x) \frac{\partial \xi}{\partial x} \tag{IV.3.13}$$

и заметим, что эта функция представляет собой силу упругости, действующую в плоскости сечения с координатой x, $x + dx$. Тогда (IV.3.12) можно записать в виде дифференциального уравнения в частных производных относительно функций $F(x, t)$ и $\dot{\xi}(x, t)$:

$$-\frac{\partial F(x, t)}{\partial x} = m_1(x) \frac{\partial \dot{\xi}(x, t)}{\partial t} + r_1(x)\, \dot{\xi}(x, t). \tag{IV.3.14}$$

Для составления второго уравнения системы используем (IV.3.13), определив из него $\partial \xi / \partial x$, представляющее собой относительное продольное перемещение частиц стержня:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = -\frac{1}{ES} F(x, t).$$

Очевидно, что уравнение, представленное в данном виде, выражает закон Гука без учета остаточной деформации. Однако при определенных условиях необходимо учитывать небольшие отступления от закона Гука, которые проявляются в гистерезисных свойствах материала: при уменьшении силы $F(x, t)$ до нуля деформация $\partial\xi/\partial x$ не исчезает, а стремится к некоторому значению $(\partial\xi/\partial x)_0$, называемому *остаточной деформацией* (рис. IV.3.2).

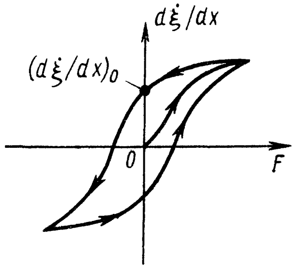

Рис. IV.3.2

Для многих материалов остаточная деформация является интегральной функцией действия силы $F(x, \tau)\,d\tau$ и может быть вычислена по формулам

$$(\partial\xi/\partial x)_0 = q_1 \int_0^t F(x, \tau)\,d\tau,$$

$$(\partial\dot{\xi}/\partial x)_0 = q_1 F(x, t),$$

$$\frac{1}{F(x, t)}\,d\dot{\xi}_0 = q_1(x)\,dx,$$

где $q_1(x)\,dx$ — механическая проводимость элемента длины стержня.

С учетом возможной остаточной деформации уравнение для полного относительного удлинения стержня примет вид

$$\frac{\partial\xi}{\partial x} = -\frac{1}{E(x)\,S(x)}F(x, t) - q_1(x)\int_0^t F(x, \tau)\,d\tau.$$

Продифференцируем это уравнение по времени t и получим второе уравнение колебаний относительно функций $\xi(x, t)$ и $F(x, t)$:

$$-\frac{\partial\dot{\xi}}{\partial x} = \frac{1}{E(x)\,S(x)}\frac{\partial F(x, t)}{\partial t} + q_1(x)\,F(x, t). \qquad \text{(IV.3.15)}$$

Вместе с граничными и начальными условиями задачи в форме (IV.3.10), (IV.3.10′) уравнения (IV.3.14) и (IV.3.15) достаточны для нахождения силы и скорости в любой момент времени и в каждом сечении стержня.

Заметим, что система уравнений (IV.3.14) и (IV.3.15) аналогична системе уравнений относительно напряжения U и тока I длинной линии передачи электрических колебаний:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial U}{\partial x} &= L(x)\frac{\partial I(x, t)}{\partial t} + R(x)\,I(x, t), \\ -\frac{\partial I}{\partial x} &= C(x)\frac{\partial U(x, t)}{\partial x} + G(x)\,U(x, t). \end{aligned} \qquad \text{(IV.3.16)}$$

Отсюда следует, что если есть уверенность, что эта аналогия сохраняется (а она сохраняется всегда для линейных колебаний), то можно для расчета колебаний стержня с подходящими граничными условиями пользоваться методами расчета электрических колебаний в линиях передачи.

Выше было показано, что для линейных систем электромеханические аналогии полностью сохраняются. При этом если принять прямую аналогию «напряжение — сила», то можно считать, что существует прямая аналогия между величинами, показанными в табл. IV.3.1.

Таблица IV.3.1

Электрическая линия	Стержни
Электрическое напряжение U	Механическая сила F
Электрический ток I	Колебательная скорость $\dot{\xi}$
Самоиндукция единицы длины L_1	Масса единицы длины m_1
Электрическая емкость единицы длины линии C_1	Гибкость единицы длины стержня c_1
Электрическое сопротивление единицы длины линии R_1	Механическое сопротивление единицы длины стержня r_1
Проводимость изоляции единицы длины линии G_1	Механическая проводимость единицы длины стержня, возникающая за счет внутреннего трения q_1

На основании указанной системы аналогий можно составить эквивалентную схему длинной линии, используя в ней обозначения механических величин вместо соответствующих электрических (рис. IV.3.3).

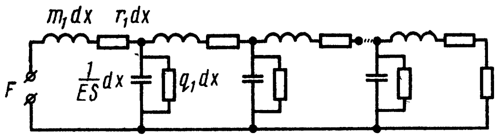

Рис. IV.3.3

В частном случае, когда на один из концов стержня действует сила, изменяющаяся по гармоническому закону от времени, в стержне установятся колебания, также подчиняющиеся гармоническому закону от времени, а именно: сила и скорость могут быть выражены функциями:

$$F(x,\ t)=\tilde{F}(x)\,e^{j\omega t},\quad \dot{\xi}(x,\ t)=\tilde{\dot{\xi}}(x)\,e^{j\omega t},$$

где $\tilde{F}(x)$ и $\tilde{\dot{\xi}}(x)$ — комплексные функции координаты.

В этом случае система уравнений в частных производных преобразуется к системе обычных линейных дифференциальных уравнений с переменными комплексными коэффициентами относительно комплексных функций действительного аргумента:

$$\begin{aligned} -\frac{d\tilde{F}}{dx}&=(j\omega m_1+r_1)\,\tilde{\dot{\xi}},\\ -\frac{d\tilde{\dot{\xi}}}{dx}&=(j\omega c_1+q_1)\,\tilde{F}. \end{aligned} \qquad \text{(IV.3.17)}$$

Здесь $m_1=S(x)\rho$; $c_1=\frac{1}{E(x)\,S(x)}$; $q_1=q_1(x)$; $\tilde{F}(x)$ и $\dot{\xi}(x)$ — комплексные функции, обозначающие амплитуды и фазы силы $F(x)$ и скорости смещения частиц $\tilde{\dot{\xi}}(x)$:

$$\tilde{F}(x)_{|x=0}=\tilde{F}_0,\quad \tilde{\dot{\xi}}(x)_{|x=0}=\dot{\xi}_0.$$