

#### § IV.4. КОЛЕБАНИЯ СТЕРЖНЕЙ ПОСТОЯННОГО СЕЧЕНИЯ

Пусть на однородный стержень постоянного сечения действует сила, определяемая гармоническим законом. Требуется найти силу  $F(x, t)$  и скорость  $\dot{\xi}(x, t)$  в каждый момент времени для каждой точки стержня, имеющей в положении равновесия координату  $x$ ,  $x + dx$ .

Как было показано выше, искомые функции будут гармоническими функциями времени с комплексными амплитудами  $\tilde{F}(x)$  и  $\tilde{\xi}(x)$ .

Из второго уравнения системы (IV.3.15) найдем

$$\tilde{F}(x) = -\frac{1}{j\omega c_1 + q} \frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial x}. \quad (\text{IV.4.1})$$

Подставляя это выражение в уравнение системы (IV.3.14), получим

$$\frac{d^2 \tilde{\xi}}{dx^2} - j\omega \tilde{c}_1 (r_1 + j\omega m_1) \tilde{\xi} = 0, \quad (\text{IV.4.2})$$

где  $c_1 = c_1(1 + q_1/(\omega c_1 j))$ . В частности, когда нет необходимости учитывать остаточную деформацию ( $q_1 = 0$ ),  $\tilde{c}_1 = c_1$ .

Решение однородного дифференциального уравнения (IV.4.2) ищем в форме

$$\tilde{\xi} = Ae^{\Gamma x} + Be^{-\Gamma x}, \quad (\text{IV.4.3})$$

где  $A$  и  $B$  — постоянные интегрирования;  $\Gamma$  — постоянная распространения, равная

$$\Gamma = \pm \sqrt{j\omega c_1 (r_1 + j\omega m_1)}. \quad (\text{IV.4.4})$$

Формулу (IV.4.4) можно упростить последовательным преобразованием:

$$\Gamma = \pm \sqrt{-\omega^2 m_1 c_1 \left(1 + \frac{r_1}{j\omega m_1}\right)} \approx \pm j\omega \sqrt{m_1 c_1} \left(1 + \frac{r_1}{j2\omega m_1}\right) = \pm (jk + \delta).$$

Для выяснения физического смысла  $k = \omega \sqrt{m_1 c_1}$  и  $\delta = \frac{r_1}{2} \sqrt{\frac{c_1}{m_1}}$  исследуем только частное решение, соответствующее  $B = 0$ :

$$\tilde{\xi} = Ae^{\pm (jk + \delta)x}.$$

Из двух знаков сохраним тот, который отвечает уменьшению фазы с ростом  $x$ , т. е. нижний:

$$\tilde{\xi} = Ae^{-\delta x} e^{-jkx}.$$

Если учесть, что  $\tilde{\xi}$  — амплитуда скорости гармонических колебаний равна

$$\dot{\xi}(x, t) = \tilde{\xi} e^{j\omega t},$$

то

$$\dot{\xi}(x, t) = Ae^{-\delta x} e^{j(\omega t - kx)},$$

или

$$\dot{\xi}(x, t) = Ae^{-\delta x} \cos(\omega t - kx). \quad (\text{IV.4.5})$$

Уравнение (IV.4.5) представляет собой выражение волнового процесса с убывающей амплитудой  $Ae^{-\delta x}$  ( $\delta$  — постоянная затухания — физическая величина, обратная расстоянию, для которого амплитуда бегущей волны уменьшается в  $e$  раз).

Величину  $\omega t - kx = \varphi$  называют фазой. Фаза изменяется с течением времени  $t$  и зависит от координаты  $x$ . Координаты постоянной фазы (фронт волны) распространяются с фазовой скоростью

$$c_0 = \frac{\omega}{k}. \quad (\text{IV.4.6})$$

Величину

$$k = \frac{\omega}{c_0} = \frac{2\pi}{Tc_0} = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (\text{IV.4.7})$$

называют волновым числом. Постоянная затухания и волновое число определяют параметрами стержня по следующим формулам:

$$\delta = \frac{r_1}{2} \sqrt{\frac{c_1}{m_1}} = \frac{r_1 l}{2lS} \sqrt{\frac{1}{E\rho}}, \quad k = \omega \sqrt{m_1 c_1} = \sqrt{\frac{\rho}{E}} \omega. \quad (\text{IV.4.8})$$

Отсюда фазовая скорость волн растяжения

$$c_0 = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \quad (\text{IV.4.9})$$

Постоянную затухания  $\delta$  можно выразить через фазовую скорость:

$$\delta = \frac{r}{2Sl} \sqrt{\frac{\rho}{E\rho^2}} = \frac{r}{2Sl} \sqrt{\frac{\rho}{E}} = \frac{r_0}{2c_0}, \quad (\text{IV.4.10})$$

где  $r_0$  — сопротивление на единицу массы стержня.

Постоянные  $A$  и  $B$  можно определить из следующих краевых условий при  $x=0$ ,  $\dot{\xi}(0) = \dot{\xi}_n$ ,  $F_{x=0} = F_n$ . Подставляя в решение (IV.4.3)  $x=0$ , получаем

$$\dot{\xi}_n = A + B. \quad (\text{IV.4.11})$$

Так как  $-F = \frac{d\xi}{dx} \frac{1}{j\omega c_1} = \frac{\Gamma}{j\omega c_1} (Ae^{\Gamma x} - Be^{-\Gamma x})$ , то

$$-F_n (x=0) = +F_n = \frac{\Gamma}{j\omega c_1} (A - B), \quad (\text{IV.4.11}')$$

где  $\Gamma/(j\omega c_1) = z_0$  — волновое сопротивление стержня.

Учитывая  $\Gamma$ ,  $c_1$ ,  $m_1$  и  $r_1$ , получаем для волнового сопротивления стержня

$$z_0 = \frac{\sqrt{j\omega c_1 (r_1 + j\omega m_1)}}{j\omega c_1} \approx \sqrt{\frac{m_1}{c_1}} \left( 1 - j \frac{r_1}{2\omega m_1} \right),$$

или, если учесть значения  $m_1$  и  $c_1$ ,

$$z_0 = S\rho \sqrt{\frac{E}{\rho}} \left( 1 - j \frac{r_1}{2\omega m_1} \right) = S\rho c_0 \left( 1 - j \frac{r_0}{2\omega} \right), \quad (\text{IV.4.12})$$

где  $r_0 = r_1 l / m$  — вязкое сопротивление единицы массы стержня;  $c_0 = \sqrt{E/\rho}$  — фазовая скорость звука.

С учетом (IV.4.12) получаем из (IV.4.11) и (IV.4.11') систему уравнений для определения постоянных  $A$  и  $B$ :

$$\dot{\xi}_H = A + B, \quad F_H / z_0 = A - B. \quad (\text{IV.4.13})$$

Решая эти уравнения, находим:

$$A = \frac{1}{2} \left( \dot{\xi}_H + \frac{F_H}{z_0} \right), \quad B = \frac{1}{2} \left( \dot{\xi}_H - \frac{F_H}{z_0} \right). \quad (\text{IV.4.14})$$

Окончательное выражение для амплитуды скорости имеет вид

$$\dot{\xi}(x) = \frac{1}{2} \left( \dot{\xi}_H + \frac{F_H}{z_0} \right) e^{\Gamma x} + \frac{1}{2} \left( \dot{\xi}_H - \frac{F_H}{z_0} \right) e^{-\Gamma x}. \quad (\text{IV.4.15})$$

Воспользовавшись гиперболическими функциями

$$\begin{aligned} \text{ch}(\Gamma x) &= \frac{1}{2} (e^{\Gamma x} + e^{-\Gamma x}), \\ \text{sh}(\Gamma x) &= \frac{1}{2} (e^{\Gamma x} - e^{-\Gamma x}), \end{aligned}$$

формулу (IV.4.15) легко привести к виду

$$\dot{\xi}(x) = \dot{\xi}_H \text{ch}(\Gamma x) + (F_H / z_0) \text{sh}(\Gamma x). \quad (\text{IV.4.16})$$

Точно так же можно получить формулу для распределения амплитуд напряжения:

$$F(x) = \frac{1}{j\omega c} \frac{d\dot{\xi}}{dx} = F_H \text{ch}(\Gamma x) + z_0 \dot{\xi}_H \text{sh}(\Gamma x). \quad (\text{IV.4.17})$$

Зная распределение напряжений и скоростей вдоль стержня, найдем механический импеданс в любом сечении стержня:

$$z(x) = F(x) / \dot{\xi}(x) = \frac{F_H \text{ch}(\Gamma x) + z_0 \text{sh}(\Gamma x)}{\dot{\xi}_H \text{ch}(\Gamma x) + F_H / z_0 \text{sh}(\Gamma x)}. \quad (\text{IV.4.18})$$

Для удобства расчетов формулу (IV.4.18) приведем к виду

$$z'(x) = \frac{z'_H + \text{th}(\Gamma x)}{1 + z'_H \text{th}(\Gamma x)}, \quad (\text{IV.4.19})$$

где  $z'(x) = z(x) / z_0$ ,  $z'_H = z_H(x) / z_0$ .

Для входного сопротивления надо положить  $x = l$ :

$$z'_{\text{вх}} = \frac{z'_H + \text{th}(\Gamma l)}{1 + z'_H \text{th}(\Gamma l)}. \quad (\text{IV.4.20})$$

В стержнях без потерь  $\delta = 0$ ; так как  $\text{th} \Gamma l = \text{th} jkl = j \text{tg} kl$ , то формула входного сопротивления имеет вид

$$z'_{\text{вх}} = \frac{z'_H + j \text{tg} kl}{1 + j z'_H \text{tg} kl}, \quad (\text{IV.4.21})$$

где  $z'_{\text{вх}}(x) = z_{\text{вх}}(x) / (\rho c_0 S)$ .

**Примеры расчета колебаний стержней при различных нагрузках.** Стержневые системы употребляют в ультразвуковой технике в качестве волноводов, т. е. устройств, с помощью которых колебания электромеханического преобразователя

передаются в технологический объект. Это необходимо, когда физические свойства среды не допускают непосредственного контакта с преобразователем.

Практически трудно бывает учесть характер нагрузки, поэтому приходится принимать определенные допущения.

Рассмотрим основные предельные случаи нагрузки.

1. *Стержень, нагруженный на нулевое сопротивление.* Это значит, что  $F_H/\xi_H=0$ , т. е. у рабочего конца напряжение равно нулю. Такой случай реализуется, когда конец стержня свободен. Конечно, в этом случае он не является передаточным звеном. Изучение колебаний свободного стержня ( $z_H=0$ ) интересно только с точки зрения исследования свойств материала, из которого этот стержень выполнен. На основании (IV.4.21) при  $z'_H=0$  (рис. IV.4.1)

$$z'_{вх} = j \operatorname{tg} kl. \quad (\text{IV.4.22})$$

В этом случае входное сопротивление — мнимая величина.

Из курса электротехники известно, что система попадает в резонанс напряжения, когда мнимая часть импеданса обращается в нуль. Поэтому условием резонанса стержня будет равенство нулю мнимой части входного механического сопротивления. Из (IV.4.22) следует  $\operatorname{tg} kl=0$ , откуда

$$k_m l = 2m \frac{\pi}{2}, \quad k_m = 2m \frac{\pi}{2l}, \quad (\text{IV.4.23})$$

или

$$\frac{l}{\lambda_m} = \frac{1}{2} m \quad (m=1, 2, 3, \dots).$$

В этом случае в длине стержня укладываются целое число полуволн. Для частот согласно (IV.4.23) выполняются следующие соотношения:

$$\omega_m = m\omega_1, \quad \omega_1 = \pi c/l. \quad (\text{IV.4.24})$$

Эти формулы выражают допустимые волновые числа и собственные частоты. Когда  $m=1$ , имеем основную частоту. Другие значения  $m$  дают частоты высших порядков. Формула (IV.4.24) показывает, что любая частота кратна основной:

$$\omega_m = m\omega_1, \quad \omega_1 = \pi c/l. \quad (\text{IV.4.25})$$

В случае резонанса свободного стержня импедансы на его концах равны нулю. Это значит, что равны нулю силы ( $F_H = F_{вх} = 0$ ). Из этого видно, что собственные колебания свободного стержня характерны тем, что напряжения на обоих концах стержня образуют узлы, а скорости — пучности. Различные моды колебаний стержня изображены на рис. IV.4.2, причем положительные ординаты соответствуют фазам сжатия, отрицательные — растяжения.

Если известно, что ненагруженный стержень имеет основной тон  $\omega$  и длину  $l$ , то по этим величинам можно определить фазовую скорость звука в материале стержня:

$$c_0 = \frac{\omega_1}{k_1} = \frac{\omega_1 l}{\pi}. \quad (\text{IV.4.26})$$

В том случае, когда стержень имеет заметные потери, построив резонансную кривую стержня, можно получить значение удельных потерь в нем по формулам:

$$\delta = \frac{r_0}{c_0} = \frac{\omega_0}{2Q}, \quad Q = \frac{\omega_0}{\omega_h},$$

где  $\omega_h$  — ширина резонансной кривой на уровне  $\sqrt{2}/2$ .

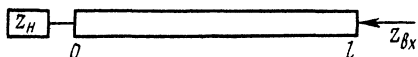


Рис. IV.4.1

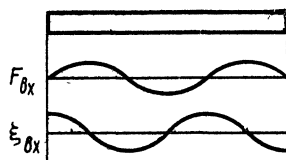
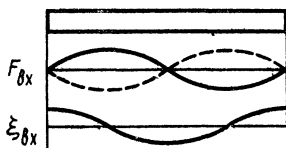
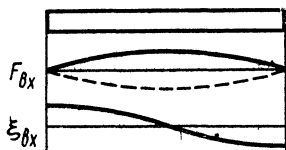


Рис. IV.4.2

Таким образом, удельный коэффициент сопротивления стержня равен

$$r_0 = \frac{\omega h}{2} c_0 = \frac{\omega h}{2} \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \quad (\text{IV.4.27})$$

2. *Стержень, нагруженный на неподвижную абсолютно жесткую опору.* В этом случае амплитуда колебательной скорости у нагруженного конца равна нулю, а напряжение отлично от нуля.

Поэтому приведенное сопротивление нагрузки

$$z'_H = \infty. \quad (\text{IV.4.28})$$

Подставляя это значение в формулу для входного сопротивления (IV.4.28), получаем входное сопротивление стержня, нагруженного на неподвижную абсолютно жесткую опору:

$$z'_{\text{вх}} = -j \operatorname{ctg} kl. \quad (\text{IV.4.29})$$

Таким образом, в данном случае это сопротивление имеет также чисто реактивный характер. Поэтому при резонансе оно полностью должно обращаться в нуль:

$$z'_{\text{вх}} = \frac{1}{\rho c_0 S} \frac{F_{\text{вх}}}{\dot{\xi}_{\text{вх}}} = 0,$$

т. е.  $F_{\text{вх}} = 0$ . Это значит, что напряжение на входе равно нулю, т. е. у входа реализуется узел напряжений. Напряжение у нагрузки по (IV.4.29) не равно нулю, т. е. у нагрузки образуется пучность напряжения (рис. IV.4.3).

Для определения собственных частот надо решить уравнение

$$\operatorname{ctg} kl = 0. \quad (\text{IV.4.30})$$

Очевидно,  $k_m l = (2m + 1) \pi/2$ , или

$$k_m = \frac{2m + 1}{2l} \pi, \quad (\text{IV.4.31})$$

или

$$\frac{l}{\lambda_m} = \frac{1}{4} (2m + 1) \quad (m = 0, 1, 2, \dots). \quad (\text{IV.4.32})$$

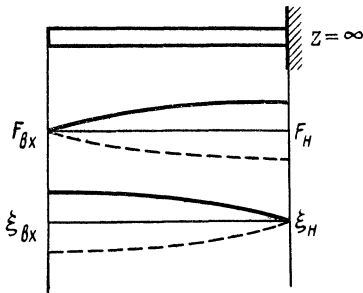


Рис. IV.4.3

Иначе говоря, когда стержень нагружен на бесконечно большое сопротивление, при резонансных частотах на длине стержня укладывается нечетное число четвертей волны. Типичным примером такого случая является четвертьволновый стакан, используемый для крепления колеблющихся стержней.

3. *Стержень, нагруженный на массу.* Результаты этого примера могут быть использованы для вычисления поправки к собственной частоте стержня, к которому присоединены накладки.

Допустим, что к концу стержня припаяна накладка, масса которой  $m$  (рис. IV.4.4 а). Эта масса эквивалентна инерционной нагрузке  $z_H = j\omega m$ . Таким образом, приведенное сопротивление нагрузки

$$z'_H = \frac{j\omega m}{\rho c_0 S}. \quad (\text{IV.4.33})$$

Входное сопротивление данного стержня определяют по формуле

$$z'_{\text{вх}} = \frac{z_{\text{вх}}}{\rho c_0 S} = \frac{j \frac{\omega m}{\rho c_0 S} + j \operatorname{tg} kl}{1 - \frac{\omega m}{\rho c_0 S} \operatorname{tg} kl},$$

или

$$z'_{\text{вх}} = j \frac{\omega m + \rho c_0 S \operatorname{tg} kl}{\rho c_0 S - \omega m \operatorname{tg} kl}. \quad (\text{IV.4.34})$$

Как и в предыдущих случаях, входное сопротивление чисто реактивно и при резонансе обращается в нуль. Это значит, что напряжение у входа равно нулю (рис. IV.4.4, б), т. е. образуется узел механического напряжения, а скорость образует пучность (рис. IV.4.4, а).

Резонансные частоты определяют из уравнения

$$\omega m + \rho c_0 S \operatorname{tg} kl = 0,$$

т. е.

$$\frac{\omega m}{\rho c_0 S} + \operatorname{tg} kl = 0. \quad (\text{IV.4.35})$$

Так как  $k = \omega/c_0$ , то уравнение (IV.4.35) можно записать в виде

$$\operatorname{tg} \frac{\omega}{c_0} l = -\frac{\omega}{c_0} \frac{m}{\rho S},$$

или

$$\operatorname{tg} \alpha = -\alpha \frac{m}{M}, \quad (\text{IV.4.36})$$

где  $\alpha = \omega l/c_0$ ;  $M = \rho l S$  — масса стержня.

Приближенное решение, достаточное в инженерной практике, легко получить графическим методом. Для этого строят графики функций

$$y_1 = \operatorname{tg} \alpha, \quad y_2 = -\alpha \frac{m}{M} \quad (\text{IV.4.37})$$

и находят абсциссы точек пересечения этих кривых (рис. IV.4.5, а, б). Как видно из этого рисунка, присоединение массы к данному стержню сдвигает резонансные частоты в сторону их уменьшения. Точками обозначены значения  $\alpha$  в случае свободного стержня, крестиками — в случае стержня этой же длины, но нагруженного на массу  $m$ .

4. *Стержень, нагруженный на упругое сопротивление.* Упругое сопротивление выражается формулой

$$z'_H = \frac{1}{c_0 \rho S} \pm \frac{1}{j \omega \bar{c}},$$

где  $c_0$  — скорость звука в стержне;  $\bar{c}$  — гибкость нагрузки.

Поэтому входное сопротивление имеет вид

$$z'_{\text{вх}} = j \frac{1/(\rho c_0 S \omega \bar{c}) - \operatorname{tg} kl}{1 + \operatorname{tg} kl/(\rho c_0 S \omega \bar{c})}. \quad (\text{IV.4.38})$$

В этом случае оно реактивно и поэтому при резонансе обращается в нуль. Это означает, что у входа напряжение равно нулю, а колебательная

скорость максимальна, т. е. у входа имеется пучность скорости и узел напряжения. У нагруженного конца эти величины имеют промежуточное значение между максимумом и минимумом (рис. IV.4.6, а).

Для нахождения резонансных частот надо найти решение уравнения (IV.4.38):

$$\frac{1}{\rho c_0 S \omega \bar{c}_0} - \operatorname{tg} kl = 0,$$

или

$$\frac{1}{\rho c_0 S \omega \bar{c}_0} = \operatorname{tg} \frac{\omega}{c_0} l, \quad (\text{IV.4.39})$$

$$\operatorname{tg} \alpha = c_l/c_0 \frac{1}{\alpha}. \quad (\text{IV.4.40})$$

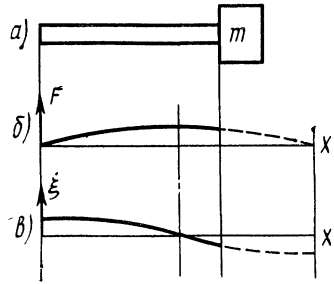


Рис. IV.4.4

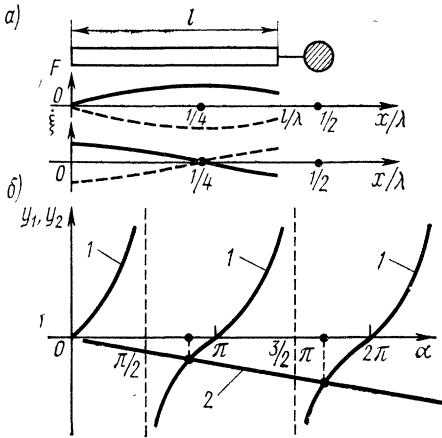


Рис. IV.4.5

Здесь  $c_l = c_1 l = l/(ES)$  — гибкость стержня длиной  $l$ ;  $\alpha = \omega l/c_0$ .

Решение этого уравнения можно провести аналитическим или графическим методом. В случае графического метода используют графики функций  $y = \operatorname{tg} \alpha$  и

$$y = \frac{c_l}{c} \frac{1}{\alpha} \quad (\text{рис. IV.4.6, б}).$$

На графике видно, что упругая нагрузка смещает собственные частоты стержня в сторону их увеличения.

5. *Стержень, нагруженный на активное сопротивление.* Если стержень своим рабочим концом погружен в очень вязкую среду, то он практически нагружен

на чисто активное сопротивление. Обозначим его как  $r' = r/(\rho c_0 S)$ . Тогда входное сопротивление стержня имеет вид

$$z'_{\text{вх}} = \frac{r' + j \operatorname{tg} kl}{1 + j r' \operatorname{tg} kl}. \quad (\text{IV.4.41})$$

Освобождаясь от комплексности знаменателя, получаем

$$z'_{\text{вх}} = \frac{r' (1 + \operatorname{tg}^2 kl) + j \operatorname{tg} kl (1 - r'^2)}{1 + r'^2 \operatorname{tg}^2 kl}. \quad (\text{IV.4.42})$$

При резонансе реактивная часть сопротивления равна нулю. Поэтому (IV.4.42) дает

$$\operatorname{tg} kl (1 - r'^2) = 0. \quad (\text{IV.4.43})$$

Выражение (IV.4.43) распадается на два уравнения:

$$\begin{aligned} 1 - r'^2 = 0 & \text{ при } \operatorname{tg} kl \neq 0, \\ \operatorname{tg} kl = 0 & \text{ при } 1 - r'^2 \neq 0. \end{aligned} \quad (\text{IV.4.44})$$

Первое уравнение имеет решение в виде

$$r = \rho c_0 S. \quad (\text{IV.4.45})$$

В этом случае сопротивление нагрузки равно волновому сопротивлению стержня.

Как видно из (IV.4.42), приведенное входное сопротивление  $z'_{\text{вх}}$  равно единице, а входное сопротивление стержня равно его волновому сопротивлению:

$$z_{\text{вх}} = \rho c_0 S. \quad (\text{IV.4.46})$$

Здесь имеется полное согласование колебательной системы с нагрузкой, что отвечает режиму бегущих волн, так как на нагруженном конце нет отражений волн.

Второе уравнение соответствует случаю, когда в стержне укладывается целое число полуволн — система находится в режиме стоячих волн.

Однако это не эквивалентно случаю отсутствия нагрузки, где тоже образуются стоячие волны. При нагрузке на произвольное активное сопротивление импеданс нагрузки  $z_{\text{н}}$  равен активному сопротивлению  $r$ , а, стало быть, входной импеданс  $z_{\text{вх}}$  равен также этому сопротивлению. Это соответствует распределению амплитуд напряжения, представленному на рис. IV.4.7. Колебания концов стержня, нагруженного на активное сопротивление, равны по амплитуде, но противоположны по фазе, если стержень содержит нечетное число полуволн. Если в длине стержня укладывается четное число полуволн, фазы колебаний концов совпадают (рис IV.4.7).

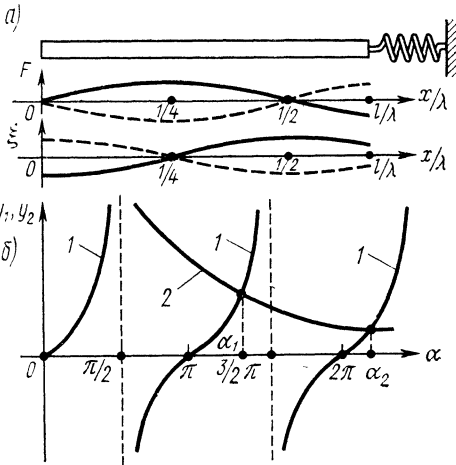


Рис. IV.4.6

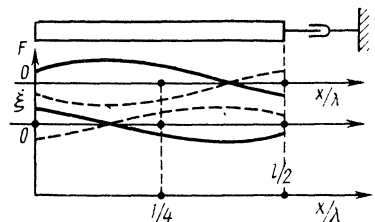


Рис. IV.4.7

Уравнения типа теле- графных	Линия электропередач	Стержневая система	Крутильные колебания стержня	Продольные колебания столба жидкости в тонких трубах
Общие	$-\frac{\partial J}{\partial x} = C \frac{\partial U}{\partial t} + GU$ $-\frac{\partial U}{\partial x} = L \frac{\partial J}{\partial t} + RJ$	$-\frac{\partial \xi}{\partial x} = c_1 \frac{\partial F}{\partial t} + q_1 F$ $-\frac{\partial F}{\partial x} = m_1 \frac{\partial \xi}{\partial t} + r_1 \xi$	$-\frac{\partial \dot{\Theta}}{\partial x} = c_{\Theta} \frac{\partial M}{\partial t} + q_{\Theta} M$ $-\frac{\partial M}{\partial x} = I \frac{\partial \dot{\Theta}}{\partial t} + r_{\Theta} \dot{\Theta}$	$-\frac{\partial V}{\partial x} = c_a \frac{\partial p}{\partial t} + q_0 p$ $-\frac{\partial p}{\partial x} = m_a \frac{\partial V}{\partial t} + r_a V$
Для гармо- нических колебаний	$-\frac{dJ}{dx} = (j\omega + G) U$ $-\frac{dU}{dx} = (j\omega L + R) J$	$-\frac{d\xi}{dx} = (j\omega c_1 + q_1) F$ $-\frac{dF}{dx} = (j\omega m_1 + r_1) \xi$	$-\frac{d\dot{\Theta}}{dx} = (j\omega c_{\Theta} + q_{\Theta}) M$ $-\frac{dM}{dx} = (j\omega I + r_{\Theta}) \dot{\Theta}$	$-\frac{dV}{dx} = (j\omega c_a + q_a) p$ $-\frac{dp}{dx} = (j\omega m_a + r_a) V$

Обозначения:  $\dot{\Theta}$  — угловая скорость;  $M$  — момент силы;  $c_{\Theta}$  — гибкость кручения единицы длины;  $q_{\Theta}$  — подвижность единицы длины;  $I$  — осевой момент инерции единицы длины стержня;  $V$  — объемная скорость;  $p$  — давление;  $c_a$ ,  $m_a$ ,  $q_a$ ,  $r_a$  — акустические гибкость, масса, сопротивление, проводимость единицы длины.

Приближенные методы расчета продольных колебаний стержней переменного сечения даны в приложении П.6.



В предыдущем параграфе было показано, что между продольными колебаниями стержней и колебаниями тока и напряжения в длинных линиях электропередач существует прямая аналогия. В связи с этим принцип аналогий с длинными линиями электропередач можно использовать для анализа колебательного движения одномерных линейных систем, записав для них систему обобщенных телеграфных уравнений относительно функций  $X(x, t)$ ,  $Y(x, t)$ , определяющих процесс колебаний в одномерной системе:

$$-\frac{\partial X}{\partial x} = a_1 \frac{\partial Y}{\partial t} + b_1 Y, \quad -\frac{\partial Y}{\partial x} = b_1 \frac{\partial X}{\partial t} + q_1 X \quad (\text{IV.4.47})$$

с граничными

$$\begin{aligned} X(x, t)|_{x=0} &= X_0(t), \\ Y(x, t)|_{x=0} &= Y_0(t) \end{aligned} \quad (\text{IV.4.48})$$

и начальными

$$\begin{aligned} X(x, t)|_{t=0} &= f(x), \\ Y(x, t)|_{t=0} &= \varphi(x) \end{aligned} \quad (\text{IV.4.49})$$

условиями. Если граничные условия выражаются гармоническими функциями времени

$$X_0(t) = \tilde{X}_0 e^{j\omega t} \quad \text{и} \quad Y_0(t) = \tilde{Y}_0 e^{j\omega t}, \quad (\text{IV.4.50})$$

то уравнения (IV.4.48) приводятся к уравнениям относительно комплексной функции действительного аргумента:

$$-\frac{d\tilde{X}(x)}{dx} = (j\omega a_1 + b_1) \tilde{Y}(x), \quad -\frac{d\tilde{Y}(x)}{dx} = (j\omega c_1 + g_1) \tilde{X}(x). \quad (\text{IV.4.51})$$

Кроме продольных колебаний стержней телеграфным уравнениям подчиняются колебания струны, воздушных и жидких столбов в жестких и нетеплопроводных прямых трубах достаточно малого сечения, крутильные колебания стержней, продольные колебания частиц в плоской волне и т. д.

Читателю предлагается провести вывод дифференциальных уравнений для этих колебаний и убедиться, что эти уравнения аналогичны дифференциальным уравнениям для линии электропередач.

В табл. IV.4.1 показана система аналогий с длинными электрическими линиями.

## § IV.5. КОЛЕБАНИЯ ЖИДКОСТИ ИЛИ ГАЗА В УЗКИХ ТРУБАХ

Процессы распространения колебания частиц жидкости или газа в трубе осложняются влиянием ее стенок. Косые отражения волн от стенок трубы создают условия для образования радиальных колебаний. Поставив задачу исследования аксиальных колебаний частиц жидкости или газа в узких трубах, мы должны учесть ряд условий, при которых можно пренебречь радиальными колебаниями. Прежде всего условие, раскрывающее понятие узкой трубы. В специальных исследованиях теории колебаний в трубах любого профиля и сечения показано, что колебания частиц газа (или жидкости) будут аксиальными, если выполняется определенное соотношение между линейными размерами сечений и длиной волны, а именно: для цилиндрической трубы  $a < 0,61 \lambda$  ( $a$  — радиус трубы,  $\lambda$  — длина волны). Если труба имеет прямоугольное сечение со стороной  $L$ , то при  $L < \lambda/2$  ее можно рассчитывать как узкую трубу. Однако имеются еще дополнительные условия, связанные с поглощением у стенок. Касательная составляющая скорости частиц у стенки равна нулю, а по мере удаления от нее она возрастает до максимального значе-