

В предыдущем параграфе было показано, что между продольными колебаниями стержней и колебаниями тока и напряжения в длинных линиях электропередач существует прямая аналогия. В связи с этим принцип аналогий с длинными линиями электропередач можно использовать для анализа колебательного движения одномерных линейных систем, записав для них систему обобщенных телеграфных уравнений относительно функций $X(x, t)$, $Y(x, t)$, определяющих процесс колебаний в одномерной системе:

$$-\frac{\partial X}{\partial x} = a_1 \frac{\partial Y}{\partial t} + b_1 Y, \quad -\frac{\partial Y}{\partial x} = b_1 \frac{\partial X}{\partial t} + q_1 X \quad (\text{IV.4.47})$$

с граничными

$$\begin{aligned} X(x, t)|_{x=0} &= X_0(t), \\ Y(x, t)|_{x=0} &= Y_0(t) \end{aligned} \quad (\text{IV.4.48})$$

и начальными

$$\begin{aligned} X(x, t)|_{t=0} &= f(x), \\ Y(x, t)|_{t=0} &= \varphi(x) \end{aligned} \quad (\text{IV.4.49})$$

условиями. Если граничные условия выражаются гармоническими функциями времени

$$X_0(t) = \tilde{X}_0 e^{j\omega t} \quad \text{и} \quad Y_0(t) = \tilde{Y}_0 e^{j\omega t}, \quad (\text{IV.4.50})$$

то уравнения (IV.4.48) приводятся к уравнениям относительно комплексной функции действительного аргумента:

$$-\frac{d\tilde{X}(x)}{dx} = (j\omega a_1 + b_1) \tilde{Y}(x), \quad -\frac{d\tilde{Y}(x)}{dx} = (j\omega c_1 + g_1) \tilde{X}(x). \quad (\text{IV.4.51})$$

Кроме продольных колебаний стержней телеграфным уравнениям подчиняются колебания струны, воздушных и жидких столбов в жестких и нетеплопроводных прямых трубах достаточно малого сечения, крутильные колебания стержней, продольные колебания частиц в плоской волне и т. д.

Читателю предлагается провести вывод дифференциальных уравнений для этих колебаний и убедиться, что эти уравнения аналогичны дифференциальным уравнениям для линии электропередач.

В табл. IV.4.1 показана система аналогий с длинными электрическими линиями.

§ IV.5. КОЛЕБАНИЯ ЖИДКОСТИ ИЛИ ГАЗА В УЗКИХ ТРУБАХ

Процессы распространения колебания частиц жидкости или газа в трубе осложняются влиянием ее стенок. Косые отражения волн от стенок трубы создают условия для образования радиальных колебаний. Поставив задачу исследования аксиальных колебаний частиц жидкости или газа в узких трубах, мы должны учесть ряд условий, при которых можно пренебречь радиальными колебаниями. Прежде всего условие, раскрывающее понятие узкой трубы. В специальных исследованиях теории колебаний в трубах любого профиля и сечения показано, что колебания частиц газа (или жидкости) будут аксиальными, если выполняется определенное соотношение между линейными размерами сечений и длиной волны, а именно: для цилиндрической трубы $a < 0,61 \lambda$ (a — радиус трубы, λ — длина волны). Если труба имеет прямоугольное сечение со стороной L , то при $L < \lambda/2$ ее можно рассчитывать как узкую трубу. Однако имеются еще дополнительные условия, связанные с поглощением у стенок. Касательная составляющая скорости частиц у стенки равна нулю, а по мере удаления от нее она возрастает до максимального значе-

ния в центре сечения трубы. Наличие поперечного градиента скорости приводит к дополнительному поглощению энергии волны, которое и вызывает искажение волнового фронта и связанное с ним появление радиальных колебаний. Но так как поглощение тем больше, чем больше вязкость газа и теплопроводность стенок трубы, то приближенная теория аксиальных колебаний в тонких трубах будет выполняться лучше, если стенки трубы очень гладкие и выполнены из жесткого материала, обладающего малой теплопроводностью. Кроме того, вязкость газа, заполняющего трубку, должна быть мала.

Если все перечисленные условия выполнены, то колебания газовых столбов в трубах можно рассматривать как колебания в длинных линиях.

Распространение звука в трубе конечной длины. На рис. IV.5.1 представлен отрезок трубы с координатами концов $0, l$. К концу трубы с координатой $x=l$ присоединен поршень с акустическим импедансом z_l и действует извне сила давления $p_0 e^{j\omega t}$. На другом конце ($x=0$) имеется поршень с акустическим импедансом z_0 . Под действием внешней силы в трубе устанавливается стационарное звуковое поле, которое является результатом наложения волн, многократно отраженных от импедансов z_0 и z_l . Звуковое давление в общем случае выражается функцией

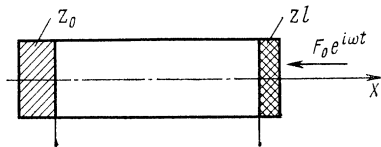


Рис. IV.5.1

$$p(x, t) = (ae^{\Gamma x} + be^{-\Gamma x}) e^{j\omega t}, \quad (\text{IV.5.1})$$

где Γ — постоянная распространения ($\Gamma = -jk - \delta$, $k = \omega \sqrt{m_a c_a}$, $\delta = r_a \sqrt{\frac{c_a}{m_a}}$).

На основании соотношения $\dot{X} = S \dot{\xi} = S \frac{j}{\omega \rho} \frac{\partial p}{\partial x}$ получаем для волн объемной скорости

$$\dot{X} = \frac{1}{z_{a_0}} (ae^{\Gamma x} - be^{-\Gamma x}) e^{j\omega t}, \quad (\text{IV.5.2})$$

где $z_{a_0} = \frac{\omega \rho}{jS\Gamma} \approx \frac{\rho c}{S}$.

Определим постоянные на основании граничных условий:

$$\begin{aligned} p(0, t) + \dot{X}(0, t) z_H &= 0, \\ p(l, t) + \dot{X}(l, t) z_l &= p_0 e^{j\omega t}. \end{aligned} \quad (\text{IV.5.3})$$

Используя (IV.5.1) и (IV.5.2), получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} a \left(1 + \frac{z_l}{z_{a_0}} \right) e^{\Gamma l} + b \left(1 - \frac{z_l}{z_{a_0}} \right) e^{-\Gamma l} &= p_0, \\ a \left(1 - \frac{z_H}{z_{a_0}} \right) + b \left(1 + \frac{z_H}{z_{a_0}} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (\text{IV.5.4})$$

Решая уравнение (IV.5.4), находим постоянные a и b :

$$a = \frac{z'_H + 1}{\Delta} p_0, \quad b = \frac{z'_H - 1}{\Delta} p_0, \quad (\text{IV.5.5})$$

где

$$z'_H = \frac{z_H}{z_{a_0}}, \quad \Delta = \begin{vmatrix} (1 + z'_l) e^{\Gamma l}, & (1 - z'_l) e^{-\Gamma l} \\ 1 - z'_H, & 1 - z'_H \end{vmatrix}, \quad z'_l = \frac{z_l}{z_{a_0}}.$$

Таким образом, давление и объемную скорость выражают формулами:

$$p(x, t) = \frac{p_0 e^{j\omega t}}{\Delta} [(z'_H + 1) e^{\Gamma x} + (z'_H - 1) e^{-\Gamma x}], \quad (\text{IV.5.6})$$

$$\dot{X}(x, t) = \frac{1}{z_{a_0}} \frac{p_0 e^{j\omega t}}{\Delta} [(z'_H + 1) e^{\Gamma x} + (z'_H - 1) e^{-\Gamma x}]. \quad (\text{IV.5.7})$$

С помощью (IV.5.6) и (IV.5.7) можно найти звуковое поле в любом сечении трубы.

У конца трубы ($x = l$), где действует возбуждающая сила, комплексные амплитуды давления и объемной скорости имеют вид:

$$p(l, t) = \frac{p_0}{\Delta} [(z'_H + 1) e^{\Gamma l} + (z'_H - 1) e^{-\Gamma l}] e^{j\omega t},$$

$$\dot{X}(l, t) = \frac{p_0}{z_{a_0} \Delta} [(z'_H + 1) e^{\Gamma l} - (z'_H - 1) e^{-\Gamma l}] e^{j\omega t},$$

а у конца, присоединенного к нагрузке,

$$p(0, t) = p_{0H} e^{j\omega t} = \frac{2\pi z_H}{\Delta} e^{j\omega t},$$

$$\dot{X}(0, t) = \dot{X}_{0H} e^{j\omega t} = \frac{2\pi}{z_{a_0} \Delta} e^{j\omega t}.$$

Путем простых преобразований можно получить следующие соотношения:

$$p_l = A p_H + B \dot{X}_H, \quad \dot{X}_l = \hat{C} p_H + D \dot{X}_H, \quad (\text{IV.5.8})$$

где $A = \text{ch}(\Gamma l)$, $B = z_{a_0} \text{sh}(\Gamma l)$, $C = \frac{\text{sh}(\Gamma l)}{z_{a_0}}$, $D = \text{sh}(\Gamma l)$.

Детерминант системы уравнений (IV.5.8) имеет значение, равное единице:

$$\begin{vmatrix} A_1 B \\ C_1 D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{ch}(\Gamma l), & z_{a_0} \text{sh}(\Gamma l) \\ \frac{\text{sh}(\Gamma l)}{z_{a_0}}, & \text{ch}(\Gamma l) \end{vmatrix} = \text{ch}^2(\Gamma l) - \text{sh}^2(\Gamma l) = 1. \quad (\text{IV.5.9})$$

Решая систему (IV.5.8) относительно p_{0H} и \dot{X}_{0H} , получаем:

$$p_{0H} = \frac{D p_l - B \dot{X}_l}{AD - CB}, \quad \dot{X}_{0H} = \frac{A \dot{X}_l - C p_l}{AD - CB}, \quad (\text{IV.5.10})$$

или

$$p_{0H} = \text{ch}(\Gamma l) p_l - z_{a_0} \text{sh}(\Gamma l) \dot{X}_l, \quad \dot{X}_{0H} = -\frac{\sin(\Gamma l)}{z_{a_0}} p_l + \text{ch}(\Gamma l) \dot{X}_l. \quad (\text{IV.5.11})$$

Если нагрузку и источник силы поменять местами, что эквивалентно замене l на $-l$, так как $\text{sh}(-\Gamma l) = -\text{sh}(\Gamma l)$, то из (IV.5.8) получим (IV.5.11). Следовательно, для отрезка трубы выполняется условие обратимости по отношению к давлению и объемной скорости.

Соотношения (IV.5.8), (IV.5.9) и (IV.5.11) выполняются для электрических пассивных четырехполюсников, если заменить давления $p_{н0}$ и p_l электрическими напряжениями U_n и U_l , объемные скорости $X_{н0}$ и X_l — токами \mathcal{I}_n и \mathcal{I}_l , акустические параметры трубы и акустические импедансы — параметрами отрезка электрической линии и электрическими импедансами. Поэтому в системе электроакустической аналогии отрезок трубы эквивалентен пассивному четырехполюснику, выполненному в виде отрезка линии электропередачи.

Заметим, что первый член (IV.5.6) представляет собой падающую, а второй — отраженную волну. Отношение комплексных отраженной и падающей волн есть коэффициент отражения

$$r_p = \frac{z'_н - 1}{z'_н + 1} = re^{j2\delta}. \quad (\text{IV.5.12})$$

В данном случае эта величина комплексная, поскольку приведенный импеданс нагрузки $z'_н$ в общем случае определяется комплексным числом.

Используя выражения (IV.5.6) и (IV.5.12), преобразуем формулу (IV.5.1):

$$p(x, t) = e^{j\omega t} a (e^{\Gamma x} + re^{j2\delta - \Gamma x}). \quad (\text{IV.5.13})$$

Прибавим и вычтем из (IV.5.13) $re^{\Gamma x}$:

$$\begin{aligned} p &= ae^{j\omega t} [e^{\Gamma x} - re^{\Gamma x} + re^{\Gamma x} + re^{j\Gamma\delta}e^{-\Gamma x}] = \\ &= ae^{j\omega t} [e^{\Gamma x} (1 - r) + re^{j\delta} (e^{+(\Gamma x - j\delta)} + e^{-(\Gamma x - j\delta)})] = \\ &= ae^{j\omega t} [e^{\Gamma x} (1 - r) + 2re^{j\delta} \text{ch}(\Gamma x - j\delta)], \end{aligned}$$

или

$$p = \frac{\pi}{\Delta} (z'_н + 1) e^{j\omega t} [(1 - r) e^{\Gamma x} + 2re^{j\delta} \text{ch}(\Gamma x - j\delta)], \quad (\text{IV.5.14})$$

где $\Gamma = j \frac{\omega}{c} + \frac{r_a S}{\rho c}$.

Точно так же для объемной скорости

$$\dot{X}(x, t) = \frac{\pi}{z_{a0}\Delta} (z'_н - 1) e^{j\omega t} [(1 - r) e^{\Gamma x} - 2re^{j\delta} \text{ch}(\Gamma x - j\delta)]. \quad (\text{IV.5.15})$$

Если потерями в трубе полностью пренебречь ($r_1 = 0$, $\Gamma = j\omega/c = jk$), то волновое акустическое сопротивление трубы $z_{a0} = \Gamma/(j\omega c S^2)$ равно действительной величине $\rho c/S$ и выражения (IV.5.14) и (IV.5.15) упрощаются:

$$p = \frac{\pi}{\Delta} (z'_н + 1) e^{j\omega t} [(1 - r) e^{jkx} + 2re^{j\delta} \cos(kx - \delta)], \quad (\text{IV.5.16})$$

$$\dot{X} = \frac{\pi}{\rho c \Delta} (z'_н - 1) e^{j\omega t} [(1 - r) e^{jkx} - 2re^{j\delta} \cos(kx - \delta)].$$

Формулы (IV.5.16) показывают, что в трубе имеются, бегущая волна с амплитудой давления $\frac{\pi}{\Delta} (z'_n + 1) (1 - r)$ и стоячая волна с амплитудой давления $\frac{\pi}{\Delta} (z'_n + 1) 2r$. При $kx_m - \delta = m\pi$ ($m = \pm 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$) получим $x_m = (m\pi + \delta) \frac{\lambda}{2\pi} = \frac{m}{2} \lambda + \delta \frac{\lambda}{2\pi}$ — максимумы давления стоячей волны. В случае абсолютно жесткой стенки первый максимум лежит на конце трубы ($x=0$). Сдвиг фазы между отраженной и падающей волнами равен нулю: $0 = \delta \frac{\lambda}{2\pi}$, $\delta = 0$, поэтому коэффициент отражения (IV.5.12) принимает значение, равное единице.

Если к трубе присоединен комплексный импеданс, то первый максимум давления лежит в плоскости с координатой $x_0 = \delta\lambda/(2\pi)$. При этом угол сдвига фаз δ меняется в пределах $-\pi/2 < \delta < +\pi/2$, в связи с чем координата максимума давления может находиться как вне, так и внутри трубы. Если первый максимум лежит вне трубы, то ближайший к концу максимум давления, находящийся внутри трубы, соответствует $m = \pm 1$ и его координата имеет значение

$$x_1 = \frac{\lambda}{2} + \frac{\delta}{\pi} \frac{\lambda}{2}. \quad (\text{IV.5.17})$$

Наряду с пучностями давления в трубе имеются области, где амплитуда давления минимальна (узлы давления). Узлы давления образуются в тех сечениях, для которых амплитуда стоячей волны равна нулю. Из (IV.5.16) видно, что условие минимума давления

$$kx_m - \delta = (2m + 1) \frac{\pi}{2} = \left(m + \frac{1}{2}\right) \pi,$$

откуда

$$x_m = \left(m + \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda}{2} + \frac{\delta}{\pi} \frac{\lambda}{2}.$$

Ближайший к концу трубы минимум давления расположен в плоскости с координатой

$$x_0 = \frac{\lambda}{4} + \frac{\delta}{\pi} \frac{\lambda}{2}. \quad (\text{IV.5.18})$$

Если $\delta = -\pi/2$, то $x_0 = 0$; если $\delta = +\pi/2$, то $x_0 = \lambda/2$. Таким образом, при изменении фазы от $-\pi/2$ до $+\pi/2$ положение первого минимума изменяется от 0 до $x_0 = \lambda/2$. Наибольшая амплитуда давления $p_{\text{макс}} = A [(1 - r) + 2r] = A (1 + r)$, а наименьшая $p_{\text{мин}} = A (1 - r)$.

Если нагрузка полностью поглощает звуковую энергию, то в трубе существует только бегущая волна $p_{\text{мин}}/p_{\text{макс}} = 1$. Наоборот, если волна полностью отражается от нагрузки, то $p_{\text{мин}}/p_{\text{макс}} = 0$.

Чем значительнее отношение $p_{\text{мин}}/p_{\text{макс}}$, тем большую долю в трубе составляет бегущая волна. Аналогично тому, как это принято в электротехнике, отношение давления в узле к давлению в пучности называют *коэффициентом бегущей волны*:

$$\frac{p_{\text{мин}}}{p_{\text{макс}}} = \frac{1 - r}{1 + r} = m. \quad (\text{IV.5.19})$$

Величина, обратная m , характеризует долю стоячей волны, или степень расогласования трубы с нагрузкой:

$$\frac{1}{m} = N = \frac{p_{\max}}{p_{\min}} = \frac{1+r}{1-r}. \quad (\text{IV.5.20})$$

Иногда эту величину называют *коэффициентом стоячей волны* (КСВ). Зная N , можно найти *модуль коэффициента отражения*:

$$r = \frac{N-1}{N+1}. \quad (\text{IV.5.21})$$

Для создания материалов, хорошо поглощающих звук, необходимо обеспечить условия, при которых звуковая энергия полностью поглощается в каналах материала вследствие наличия вязкости воздуха и внутреннего трения самого материала. Для характеристики звукопоглощения материала служит *коэффициент звукопоглощения*, который определяют как отношение:

$$\alpha = \frac{I_{\text{пад}} - I_{\text{отр}}}{I_{\text{пад}}}. \quad (\text{IV.5.22})$$

Между коэффициентами звукопоглощения по энергии и отражения по амплитуде давления существует простая связь:

$$\alpha = 1 - r^2. \quad (\text{IV.5.23})$$

Отсюда

$$\alpha = \frac{4}{2 + N + 1/N}. \quad (\text{IV.5.24})$$

В акустических измерениях большое значение имеет реализация возможности получения плоских волн. Если измерение нужно проводить на низких частотах, т. е. в области частот слышимого звука, то для получения плоской волны обычно используют трубу как акустическую линию. Трубу, закрытую с одной стороны, обычно применяют для измерения коэффициента отражения материала $r = r_p e^{j\delta}$. Для этого возбуждают колебания в трубе, перемещая малый микрофон вдоль оси трубы, находят зависимость давления от расстояния до конца трубы, где установлена пробка из исследуемого материала. Допустим, что на расстоянии x_0 обнаружен первый минимум давления. Тогда фаза коэффициента отражения согласно (IV.5.18)

$$\delta = \left(x_0 - \frac{\lambda}{4}\right) \frac{2\pi}{\lambda}. \quad (\text{IV.5.25})$$

Расстояние между двумя соседними минимумами равно $\lambda/2$. Отношение $p_{\max}/p_{\min} = N$. Определив N , по формуле $r = (1-N)/(1+N)$ найдем модуль коэффициента отражения и по формуле (IV.5.24) — коэффициент поглощения материала. На основании (IV.5.13) по известным r_p и δ можно вычислить отношение акустического импеданса материала к волновому сопротивлению трубы:

$$\frac{r_H}{\rho c} = \frac{1 - r_p e^{j2\delta}}{1 + r_p e^{j2\delta}} = \frac{1 - r_p \cos 2\delta - jr \sin 2\delta}{1 + r \cos 2\delta + jr \sin 2\delta} = X' + jY'.$$

Для облегчения вычислений пользуются следующими преобразованиями. Модуль r представим в виде $r_p = e^{-2\epsilon}$. В этом случае

$$r = \frac{r' - 1}{r' + 1} = e^{-2\psi} \quad (\psi = \epsilon < j\delta). \quad (\text{IV.5.26})$$

Тогда, решая (IV.5.26), находим

$$Z' = X' + jY' = \frac{e^\psi + e^{-\psi}}{e^\psi - e^{-\psi}} = \text{cth}(\epsilon - j\delta),$$

откуда

$$X' = \frac{\text{sh } 2\epsilon}{\text{ch } 2\epsilon - \cos 2\delta}, \quad Y' = \frac{\sin 2\delta}{\text{ch } 2\epsilon - \cos 2\delta}, \quad (\text{IV.5.27})$$

или

$$X' = \frac{2N}{(N^2 + 1) - (N^2 - 1) \cos 2\delta}, \quad Y' = \frac{(N^2 - 1) \sin 2\delta}{(N^2 + 1) - (N^2 - 1) \cos 2\delta}. \quad (\text{IV.5.28})$$

По формулам (IV.5.27) или (IV.5.28) нетрудно вычислить приведенные активное и реактивное сопротивления X' и Y' , если измерены значения величин N и δ .

§ IV.6. ПОПЕРЕЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СТЕРЖНЕЙ

Вывод дифференциального уравнения. Допустим, что ось абсцисс совпадает с осью недеформированного стержня. Рассмотрим только малые колебания, при которых смещения точек оси стержня перпендикулярны оси координат X , а восстанавливающие силы находятся в пределах действия закона Гука.

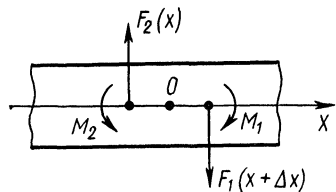


Рис. IV.6.1

Пусть m_1 — масса единицы длины стержня, E — модуль Юнга, J — момент инерции площади поперечного сечения относительно нейтральной оси сечения, перпендикулярной плоскости колебаний. Выделим элемент стержня длиной Δx , его масса равна $m_1 \Delta x$, момент инерции относительно оси, перпендикулярной плоскости колебаний, проходящей через центр тяжести O , равен $I_0 \Delta x$ (I_0 — момент инерции единицы длины стержня). На этот элемент действуют: сила F_1 ; пара сил с моментом M_1 со стороны части стержня, расположенной справа от этого элемента; сила F_2 и пара сил с моментом M_2 со стороны части стержня, расположенного слева (рис. IV.6.1). Кроме того, на него действует внешняя нагрузка $f(x, t) \Delta x$. В этом случае смещение точек оси стержня будет являться однозначной функцией координаты x и времени t .

По законам механики получаем уравнение сил

$$m_1 \Delta x \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -F_1 + F_2 + f(x, t) \Delta x \quad (\text{IV.6.1})$$

и уравнение моментов

$$I_0 \Delta x \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right) = -M_1 + M_2 - F_2 \frac{\Delta x}{2} - F_1 \frac{\Delta x}{2}. \quad (\text{IV.6.2})$$