

Для облегчения вычислений пользуются следующими преобразованиями. Модуль  $r$  представим в виде  $r_p = e^{-2\epsilon}$ . В этом случае

$$r = \frac{r' - 1}{r' + 1} = e^{-2\psi} \quad (\psi = \epsilon < j\delta). \quad (\text{IV.5.26})$$

Тогда, решая (IV.5.26), находим

$$Z' = X' + jY' = \frac{e^\psi + e^{-\psi}}{e^\psi - e^{-\psi}} = \text{cth}(\epsilon - j\delta),$$

откуда

$$X' = \frac{\text{sh } 2\epsilon}{\text{ch } 2\epsilon - \cos 2\delta}, \quad Y' = \frac{\sin 2\delta}{\text{ch } 2\epsilon - \cos 2\delta}, \quad (\text{IV.5.27})$$

или

$$X' = \frac{2N}{(N^2 + 1) - (N^2 - 1) \cos 2\delta}, \quad Y' = \frac{(N^2 - 1) \sin 2\delta}{(N^2 + 1) - (N^2 - 1) \cos 2\delta}. \quad (\text{IV.5.28})$$

По формулам (IV.5.27) или (IV.5.28) нетрудно вычислить приведенные активное и реактивное сопротивления  $X'$  и  $Y'$ , если измерены значения величин  $N$  и  $\delta$ .

## § IV.6. ПОПЕРЕЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СТЕРЖНЕЙ

**Вывод дифференциального уравнения.** Допустим, что ось абсцисс совпадает с осью недеформированного стержня. Рассмотрим только малые колебания, при которых смещения точек оси стержня перпендикулярны оси координат  $X$ , а восстанавливающие силы находятся в пределах действия закона Гука.

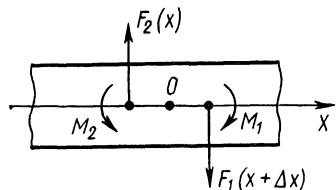


Рис. IV.6.1

Пусть  $m_1$  — масса единицы длины стержня,  $E$  — модуль Юнга,  $J$  — момент инерции площади поперечного сечения относительно нейтральной оси сечения, перпендикулярной плоскости колебаний. Выделим элемент стержня длиной  $\Delta x$ , его масса равна  $m_1 \Delta x$ , момент инерции относительно оси, перпендикулярной плоскости колебаний, проходящей через центр тяжести  $O$ , равен  $I_0 \Delta x$  ( $I_0$  — момент инерции единицы длины стержня). На этот элемент действуют: сила  $F_1$ ; пара сил с моментом  $M_1$  со стороны части стержня, расположенной справа от этого элемента; сила  $F_2$  и пара сил с моментом  $M_2$  со стороны части стержня, расположенного слева (рис. IV.6.1). Кроме того, на него действует внешняя нагрузка  $f(x, t) \Delta x$ . В этом случае смещение точек оси стержня будет являться однозначной функцией координаты  $x$  и времени  $t$ .

По законам механики получаем уравнение сил

$$m_1 \Delta x \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -F_1 + F_2 + f(x, t) \Delta x \quad (\text{IV.6.1})$$

и уравнение моментов

$$I_0 \Delta x \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right) = -M_1 + M_2 - F_2 \frac{\Delta x}{2} - F_1 \frac{\Delta x}{2}. \quad (\text{IV.6.2})$$

Разделив оба уравнения на  $\Delta x$  и переходя к пределу, находим:

$$m_1 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = - \frac{\partial F}{\partial x} + f(x, t), \quad (\text{IV.6.3})$$

$$I_0 \frac{\partial^3 y}{\partial t^2 \partial x} = - \frac{\partial M}{\partial x} - F, \quad (\text{IV.6.4})$$

где

$$M = - EJ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}. \quad (\text{IV.6.5})$$

Исключая из (IV.6.3) и (IV.6.4)  $M$  и  $F$ , находим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left[ J_0 \frac{\partial^3 y}{\partial x \partial t^2} \right] &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ EJ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right] + m_1 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - f(x, y), \\ \beta \frac{\partial^4 y}{\partial x^2 \partial t^2} &= \alpha^4 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{1}{m_1} f(x, y), \end{aligned} \quad (\text{IV.6.6})$$

где  $\beta = I_0/m_1$ ;  $\alpha^4 = EJ/m_1 = Ek^2/\rho$ ;  $k$  — радиус момента инерции площади поперечного сечения стержня относительно оси, лежащей в этом сечении и перпендикулярной плоскости колебаний  $YOX$ .

Для оценки вклада каждого слагаемого в уравнении (IV.6.6) подставим функцию

$$y = y_0 e^{j\left(\omega t - \frac{\omega}{v} x\right)},$$

где  $v$  — скорость распространения поперечных волн стержня

В результате получим

$$\beta \left(\frac{\omega}{v}\right)^2 \omega^2 = \alpha^4 \left(\frac{\omega}{v}\right)^4 - \omega^2,$$

или

$$\frac{I_0}{m_1} \left(\frac{\omega}{v}\right)^2 = \frac{c_0^2}{v^2} \kappa^2 \left(\frac{\omega}{v}\right)^2 - 1.$$

Момент инерции единицы стержня  $I_0 \approx m_1 l^2/12$ , поэтому  $I_0/m_1 \approx l^2/12$ . Пусть  $l^2/12 \ll (c_0/v)^2 \kappa^2$ , т. е.  $(c_0/v)^2 \gg (l/\kappa)^2$ . Тогда в (IV.6.6) слагаемым, связанным с инерцией вращения, можно пренебречь и привести уравнение к виду

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \alpha^4 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = \frac{1}{m_1} f(x, t). \quad (\text{IV.6.7})$$

Опыт показывает, что  $(c_0/v)^2 \sim 1/\omega$ , поэтому (IV.6.7) выполняется для низких частот.

В этом приближении уравнение (IV.6.4) имеет вид

$$F = - \frac{\partial M}{\partial x}. \quad (\text{IV.6.8})$$

Оно должно быть дополнено граничными и начальными условиями. Вследствие того что это уравнение содержит производные второго порядка по времени и четвертого порядка по координате  $x$ , возникает необходимость задать два начальных и, кроме того, для каждого конца стержня по два граничных условия.

Начальные условия задаются соотношениями

$$y(x, 0) = u(x); \quad \dot{y}(x, t)|_{t=0} = \dot{u}(x),$$

где  $u(x)$  и  $\dot{u}(x)$  — некоторые функции  $x$ , задающие распределение смещений и скоростей вдоль стержня.

Граничные условия определяются характером связей, существующих на концах стержня.

В простейших случаях конец стержня может быть свободным, зажатым и опертым.

В случае, когда конец стержня свободен, скалывающая сила  $F$  и изгибающий момент  $M$  равны нулю, т. е. согласно уравнениям (IV.6.8) и (IV.6.5) имеем:

$$F|_{x=0} = -\frac{\partial M}{\partial x}|_{x=0} = EI \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}|_{x=0} = 0, \quad \text{или} \quad \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}|_{x=0} = 0;$$

$$M = -EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}|_{x=0} = 0, \quad \text{или} \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}|_{x=0} = 0.$$

Таким образом, *граничные условия для свободного конца стержня*

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}|_{x=0} = 0. \quad (\text{IV.6.9})$$

Если *конец стержня жестко зажат*, то угол поворота в месте закрепления и смещения равен нулю, т. е. должны выполняться следующие условия:

$$\theta|_{x=0} = \frac{\partial y}{\partial x}|_{x=0} = 0, \quad y(x, t)|_{x=0} = 0. \quad (\text{IV.6.10})$$

Для опертого стержня смещение и изгибающий момент равны нулю, что соответствует следующим граничным условиям:

$$y|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}|_{x=0} = 0. \quad (\text{IV.6.11})$$

**Собственные частоты и функции поперечных колебаний стержня.** Простым решением уравнения (IV.6.7) для случая, когда внешняя сила равна нулю, является гармоническая функция вида

$$y(x, t) = \varphi(x) e^{j(\omega t + \alpha)}. \quad (\text{IV.6.12})$$

Чтобы получить уравнения для собственных функций  $\varphi(x)$ , подставим (IV.6.12) в (IV.6.7). После сокращения на  $e^{j(\omega t + \alpha)}$  получим

$$\frac{d^4 \varphi}{dx^4} - k^4 \varphi = 0, \quad (\text{IV.6.13})$$

где

$$k^4 = \frac{\omega^2}{\alpha^4} = \frac{\rho \omega^4}{E \kappa^2}. \quad (\text{IV.6.14})$$

Уравнение (IV.6.13) имеет четыре независимых частных решения:  $\cos kx$ ,  $\sin kx$ ,  $\text{ch } kx$  и  $\text{sh } kx$ . Общее решение представляет собой линейную комбинацию этих частных решений:

$$\varphi(x) = A_1 \cos kx + B_1 \sin kx + C_1 \text{ch } kx + D_1 \text{sh } kx. \quad (\text{IV.6.15})$$

Постоянные  $A, B, C$  и  $D$  определяют на основании граничных условий. Наиболее простым из них соответствуют случаи, когда стержень:

- а) свободен на краях;
- б) зажат с одной стороны, свободен с другой;
- в) зажат с обоих концов;
- г) опирается с обоих концов;
- д) опирается с одной стороны и зажат с другой.

Например, если стержень с одной стороны зажат, а с другой свободен, то  $\varphi = \varphi' = 0$  при  $x=0$  и  $\varphi''(l) = \varphi'''(l)$  при  $x=l$ .

Если он зажат с обоих концов, то на концах осуществляется равенство нулю как смещения, так и угла прогиба:

$$\begin{aligned} \varphi = \varphi' &= 0 & \text{при } x=0, \\ \varphi(l) = \varphi'(l) &= 0 & \text{при } x=l. \end{aligned}$$

Для решения конкретных задач об изгибных колебаниях стержней удобно пользоваться функциями Крылова:

$$\begin{aligned} S(x) &= \frac{1}{2}(\operatorname{ch} x + \cos x), & T(x) &= \frac{1}{2}(\operatorname{sh} x + \sin x), \\ U(x) &= \frac{1}{2}(\operatorname{ch} x - \cos x), & V(x) &= \frac{1}{2}(\operatorname{sh} x - \sin x). \end{aligned} \quad (\text{IV.6.16})$$

Первые четыре производные функции Крылова и значения этих производных при  $x=0$  представлены в табл. IV.6.1.

Т а б л и ц а IV.6.1

Функции	Производные функции				Функции	Производные функции			
	I	II	III	IV		I	II	III	IV
$S(x)$	$V(x)$	$U(x)$	$T(x)$	$S(x)$	$U(x)$	$T(x)$	$S(x)$	$V(x)$	$U(x)$
$T(x)$	$S(x)$	$V(x)$	$U(x)$	$T(x)$	$V(x)$	$U(x)$	$T(x)$	$S(x)$	$V(x)$

Непосредственной проверкой можно показать, что

$$S(0) = T'(0) = U''(0) = V'''(0) = 1,$$

а все другие значения функций и их производных при  $x=0$  равны нулю.

Посредством функций Крылова решение (IV.6.15) для распределения амплитуд изгибных колебаний представим так:

$$\varphi(x) = AS(kx) + BT(kx) + CU(kx) + DV(kx). \quad (\text{IV.6.17})$$

Рассмотрим стержень со свободными концами как пример расчета колебаний стержней с различными типами закрепления.

Граничные условия для свободного конца стержня при  $x=0$  имеют вид  $\varphi'' = \varphi''' = 0$ . Взяв вторую и третью производные от (IV.6.17), положив  $x=0$  и воспользовавшись граничными условиями при  $x=0$ , получим  $C = D = 0$ . Таким образом, решение будет иметь вид

$$\varphi(x) = AS(x) + BT(x). \quad (\text{IV.6.17}')$$

Для определения постоянных  $A$  и  $B$  следует воспользоваться граничными условиями для конца с  $x=l$ . Полагая, что этот конец также свободен, получим

$$\varphi''(kl) = \varphi'''(kl) = 0,$$

Воспользовавшись (IV.6.17) и граничными условиями для  $x=l$ , получим систему однородных уравнений относительно коэффициентов  $A$  и  $B$ :

$$AU(kl) + BV(kl) = 0, \quad AT(kl) + BU(kl) = 0. \quad (\text{IV.6.18})$$

Эти уравнения имеют отличные от нуля и независимые решения при условии, что детерминант системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} U(kl) & V(kl) \\ T(kl) & U(kl) \end{vmatrix} = [U(kl)]^2 - V(kl)T(kl) = 0. \quad (\text{IV.6.19})$$

Выражение (IV.6.19) представляет собой характеристическое уравнение для определения собственных чисел  $k$  и частот  $\omega$ . Его решение имеет множество корней  $k_m l = \beta_m$  ( $m=1, 2, \dots$ ). Первые три корня имеют значения:  $\beta_1 = 4,73$ ;  $\beta_2 = 7,85$ ;  $\beta_3 = 11,00$ . Зная значения корней  $\beta_m$ , можно найти значения допустимых собственных частот. Для (IV.6.14) надо найти  $\omega = k^2 \kappa \sqrt{\frac{E_0}{\rho_0}} = k^2 c_0 \kappa$  ( $c_0$  — стержневая скорость звука для продольных волн,  $\kappa$  — радиус инерции площади поперечного сечения,  $k$  — волновое число для изгибных волн).

Таким образом, собственные частоты колебаний стержня со свободными концами определяют формулой

$$\omega_m = k_m^2 c_0 \kappa = c_0 \kappa \frac{\beta_m^2}{l^2}, \quad \text{или} \quad f_m = \frac{\beta_m^2}{2\pi l^2} c_0 \kappa. \quad (\text{IV.6.20})$$

Используя значения корней  $\beta_m$ , находим:

$$f_1 = (4,73)^2 \frac{1}{2\pi} \frac{1}{l^2} \kappa c_0, \quad f_2 = (7,85)^2 \frac{1}{2\pi} \frac{1}{l^2} \kappa c_0. \quad (\text{IV.6.21})$$

Формулы (IV.6.21) показывают, что частоты высших обертонов не кратны основной частоте:

$$f_2 = \left(\frac{7,85}{4,73}\right)^2 f_1, \quad f_3 = \left(\frac{11}{4,73}\right)^2 f_1, \quad \dots, \quad f_m = \left(\frac{\beta_m}{4,73}\right)^2 f_1. \quad (\text{IV.6.22})$$

Зная собственные частоты колебаний, можно найти функцию, отвечающую возможным формам колебаний стержня. Из первого уравнения (IV.6.18) находим  $B = -A \frac{V(\beta_m)}{U(\beta_m)}$ , так что форма колебаний  $m$ -го обертона определится уравнением

$$\varphi_m(x) = A \left[ S\left(\frac{\beta_m}{l} x\right) - \frac{V(\beta_m)}{U(\beta_m)} T\left(\frac{\beta_m}{l} x\right) \right], \quad (\text{IV.6.23})$$

где  $m=1, 2, 3, \dots$

Приравняв нулю  $\varphi(x)$  и решая полученные уравнения относительно  $\beta_m x/l$ , находим координаты узлов колебаний.

Приравнявая нулю  $\varphi(x)$  и решая полученные уравнения, найдем координаты пучностей изгибных колебаний стержня. Так, например, для первых двух мод координаты узлов имеют значения:

$$\begin{aligned} m=1; & \quad x_{11} = 0,224l; \quad x_{12} = (1 - 0,224)l; \\ m=2; & \quad x_{21} = 0,132l; \quad x_{22} = 0,500l; \quad x_{23} = (1 - 0,132)l. \end{aligned}$$

На рис. IV.6.2 схематично показаны распределения узлов и пучностей для первой ( $m=1$ ) и второй ( $m=2$ ) мод.

Аналогично рассчитывают и другие частные случаи поперечных колебаний стержней и находят форму этих колебаний.

Фазовая скорость  $v$  распространения поперечных колебаний вдоль стержня может быть вычислена с помощью формулы (IV.6.14):

$$v^2 = \frac{\omega^2}{k^2} = k^2 \frac{E\kappa^2}{\rho_0}, \quad v = k \sqrt{\frac{E}{\rho_0}} \kappa = \kappa c_l k.$$

Здесь число  $k$  зависит от частоты:

$$k = \sqrt[4]{\frac{\rho_0 \omega^2}{E\kappa^2}} = \sqrt{\frac{\omega}{c_0 \kappa}}.$$

Отсюда следует, что

$$v = \kappa c_l \sqrt{\frac{\omega}{c_l \kappa}} = \sqrt{c_l \kappa} \sqrt{\omega}. \quad (\text{IV.6.24})$$

Если принять во внимание влияние вращения, т. е. не отбрасывать в уравнении колебаний стержней член, пропорциональный моменту инерции единицы длины стержня  $I_0$ , и, кроме того, учесть

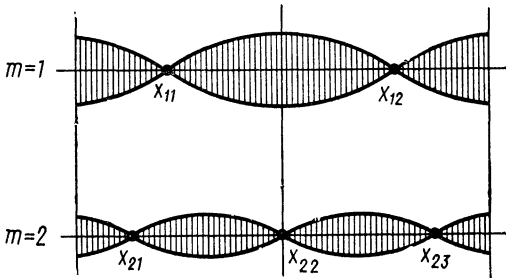


Рис. IV.6.2

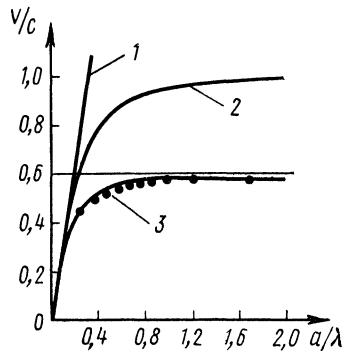


Рис. IV.6.3

влияние сдвиговых деформаций, то получим точное выражение для скорости изгибных волн:

$$v^2 = \frac{\alpha^2 \omega}{\sqrt{1 + [\beta \kappa^2 \omega / (2\alpha^2)]^2 - \delta \omega^2}}, \quad (\text{IV.6.25})$$

где  $\delta$  — поправка на сдвиг, равная  $\rho_0^2 \gamma \alpha^4 / (GE)$ ;  $\gamma$  — поправка на равномерность распределения напряжений по всему поперечному сечению; для круглого стержня  $\gamma = 1,1$ ;  $G$  — модуль сдвига.

При низких частотах поправками можно пренебречь, и мы получим приближительную формулу для вычисления скорости изгибных волн (IV.6.24).

На рис. IV.6.3 показан график отношения скорости поперечных волн  $V$  в стержне к скорости продольных волн  $c_0$  в зависимости от отношения радиуса  $a$  стержня к длине  $\Lambda$  изгибной волны  $\left(\frac{a}{\Lambda} = \frac{a \sqrt{\omega}}{2\pi \sqrt{c_0 \kappa}}\right)$ .

Кривая 1 построена по приближенной формуле (IV.6.24), кривая 2 — по формуле (IV.6.25) без учета сдвига ( $\delta \rightarrow 0$ ) и кривая 3 — по точной формуле (IV.6.25). На этих графиках ясно выражено то, что при высоких частотах приближенная формула дает завышенные значения скорости изгибных волн. Удовлетворительные результаты получаются только при частотах, соответствующих  $a/\Lambda \leq 1/8$ .

## ГЛАВА V

### ДВУХМЕРНЫЕ КОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

#### § V.1. ПОПЕРЕЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ МЕМБРАН

**Вывод дифференциального уравнения.** Мембраной называют материальную поверхность, не имеющую упругости формы. Хорошим примером мембраны является лист бумаги, натянутый на жесткий каркас. Для того чтобы натяжение было равномерным, перед монтажом необходимо бумагу слегка увлажнить. После высыхания бумаги получится растянутая во все стороны поверхность, свойства которой очень близки к свойствам идеализированной мембраны.

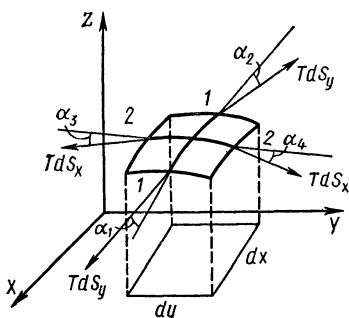


Рис. V.1.1

Для вывода дифференциального уравнения мембраны представим себе немного деформированный элемент поверхности  $dS$  (с поверхностной плотностью  $\rho$ ) со сторонами  $dS_x$  и  $dS_y$  в состоянии смещения от положения равновесия (рис. V.1.1).

На рисунке обозначим силы натяжения  $T dS_x \approx T dx$ ,  $T dS_y \approx T dy$ . Проекция этих сил натяжения на ось  $Z$  состоит из суммы проекций сил, действующих в плоскости, параллельной  $YOZ$ , и суммы проекций сил, действующих в плоскости, параллельной  $XOZ$ . Из геометрических соображений и на основании того, что проекцию каждой силы вычисляют так же, как это было сделано для струны, получим результирующую силу.

На рис. V.1.1 показаны сечения 1—1 и 2—2. Проекция сил, действующих в сечении 1—1,

$$-T dy \sin \alpha_1 = dF_1, \quad T dy \sin \alpha_2 = dF_2,$$

а в сечении 2—2

$$-T dx \sin \alpha_3 = dF_3, \quad T dx \sin \alpha_4 = dF_4.$$

В сумме проекций сил  $dF_1$ ,  $dF_2$ ,  $dF_3$ ,  $dF_4$  из-за малости углов синусы можно заменить производными смещений по составляющим координатам.