Кривая *1* построена по приближенной формуле (IV.6.24), кривая *2* — по формуле (IV.6.25) без учета сдвига ($\delta \to 0$) и кривая *3* — по точной формуле (IV.6.25). На этих графиках ясно выражено то, что при высоких частотах приближенная формула дает завышенные значения скорости изгибных волн. Удовлетворительные результаты получаются только при частотах, соответствующих $a/\Lambda \leqslant 1/8$.

ГЛАВА V

ДВУХМЕРНЫЕ КОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

§ V.1. ПОПЕРЕЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ МЕМБРАН

Вывод дифференциального уравнения. *Мембраной* называют материальную поверхность, не имеющую упругости формы. Хорошим примером мембраны является лист бумаги, натянутый на жесткий каркас. Для того чтобы натяжение было равномерным, перед монтажом необходимо бумагу слегка увлажнить. После высыхания бумаги получится растянутая во все стороны поверхность, свойства которой очень близки к свойствам идеализированной мембраны.

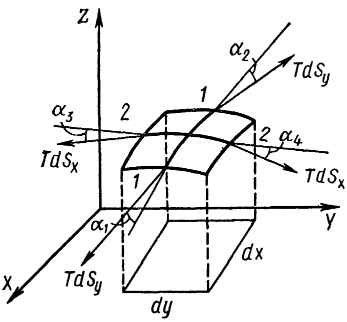

Рис. V.1.1

Для вывода дифференциального уравнения мембраны представим себе немного деформированный элемент поверхности dS (с поверхностной плотностью ρ) со сторонами dS_x и dS_y в состоянии смещения от положения равновесия (рис. V.1.1).

На рисунке обозначим силы натяжения $T\,dS_x \approx T\,dx$, $T\,dS_y \approx T\,dy$. Проекции этих сил натяжения на ось Z состоят из суммы проекций сил, действующих в плоскости, параллельной YOZ, и суммы проекций сил, действующих в плоскости, параллельной XOZ. Из геометрических соображений и на основании того, что проекцию каждой силы вычисляют так же, как это было сделано для струны, получим результирующую силу.

На рис. V.1.1 показаны сечения *1—1* и *2—2*. Проекции сил, действующих в сечении *1—1*,

$$-T\,dy \sin\alpha_1 = dF_1, \quad T\,dy \sin\alpha_2 = DF_2,$$

а в сечении *2—2*

$$-T\,dx \sin\alpha_3 = dF_3, \quad T\,dx \sin\alpha_4 = dF_4.$$

В сумме проекций сил dF_1, dF_2, dF_3, dF_4 из-за малости углов синусы можно заменить производными смещений по составляющим координатам.

Таким образом, общая сила упругости натяжения, действующая параллельно оси Z, имеет значение

$$dF = T\,dy\left[\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)_{|\,x+\Delta x} - \left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)_{|\,x}\right] + T\,dx\left[\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)_{|\,y+\Delta y} - \left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)_{|\,y}\right] =$$
$$= T\,dy\,\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}\,dx + T\,dx\,\frac{\partial^2\eta}{\partial y^2}\,dy = \left(\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\eta}{\partial y^2}\right)T\,dx\,dy. \qquad (\text{V.1.1})$$

На основании законов динамики эта сила создает ускорение, равное

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} = \frac{dF}{\rho\,dx\,dy} = \frac{T}{\rho}\left(\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\eta}{\partial y^2}\right). \qquad (\text{V.1.2})$$

В результате получаем дифференциальное уравнение мембраны в прямоугольной декартовой системе координат:

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} - \frac{T}{\rho}\left(\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\eta}{\partial y^2}\right) = 0. \qquad (\text{V.1.3})$$

Пользуясь правилами преобразования частных производных функций двух переменных от одной ортогональной системы координат к другой, можно найти выражение (V.1.3) в полярной системе координат $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\varphi = \operatorname{arctg}(y/x)$. Однако полезно провести вывод уравнения в полярной системе координат непосредственно, пользуясь законами механики. Расположим начало полярной системы координат в центре мембраны с круглым краем и допустим, что смещение зависит только от расстояния r до полюса 0. Результирующее натяжение, по окружности направленное перпендикулярно плоскости мембраны, находящейся в положении равновесия, равно

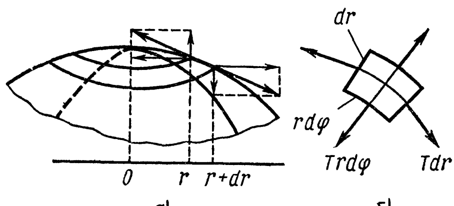

Рис. V.1.2

$$2\pi r T \sin\alpha \approx 2\pi r \operatorname{tg}\alpha = 2\pi r\,\frac{\partial\eta}{\partial r}. \qquad (\text{V.1.4})$$

Разность напряжений на границах кольца шириной dr составляет $\frac{\partial}{\partial r}\left(2\pi r\,\frac{\partial\eta}{\partial r}\right)T\,dr$ и дает результирующую силу упругости, перпендикулярную плоскости положения равновесия мембраны и действующую на кольцо с площадью $2\pi r\,dr$ и массой $\rho\,dr\cdot 2\pi r$ (рис. V.1.2, *а*).

Ускорение, которое получит это кольцо,

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} = \frac{\frac{\partial}{\partial r}\left(2\pi r\,\frac{\partial\eta}{\partial r}\,T\right)dr}{2\pi r\,dr\rho} = \frac{T}{\rho}\cdot\frac{\partial\left(r\,\frac{\partial\eta}{\partial r}\right)}{r},$$

или

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} - \frac{T}{\rho}\left[\frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}\left(r\,\frac{\partial\eta}{\partial r}\right)\right] = 0. \qquad (\text{V.1.5})$$

Выражение (V.1.5) представляет собой уравнение свободных колебаний мембраны в полярных координатах для случая, когда смещение не зависит от полярного угла φ.

Если смещение η зависит, кроме того, от полярного угла, то необходимо рассматривать действие сил на квазипрямоугольный участок мембраны, ограниченный двумя окружностями и двумя радиусами. Стороны этого элемента поверхности равны dr и $r\,d\varphi = dS$ (рис. V.1.2, *б*).

Напряжения на криволинейных сторонах дают результирующую силу, параллельную Z

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(T\,dS\,\frac{\partial\eta}{\partial r}\right) = \frac{\partial}{\partial r}\left[(Tr\,d\varphi)\,\frac{\partial\eta}{\partial r}\right]dr.$$

Результирующая сила, действующая на прямолинейные стороны,

$$\frac{\partial}{r\,\partial\varphi}\left(T\,dr\,\frac{\partial\eta}{r\,\partial\varphi}\right)d\,\varphi r = \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(T\,dr\,\frac{d\eta}{r\,d\varphi}\right)d\varphi.$$

Сумма этих сил создает ускорение элемента поверхности

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} = \frac{T}{\rho}\left[\frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}\left(r\,\frac{\partial\eta}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2\eta}{\partial\varphi^2}\right]. \qquad \text{(V.1.6)}$$

Выражения (V.1.3) и (V.1.6) представляют собой волновые уравнения мембраны, записанные в прямоугольной XOY и полярной φor системах координат.

Для решения волнового уравнения применяют обычно два метода: замены переменных (метод Даламбера) и разделения переменных. Первый удобен для неограниченной среды, второй — для ограниченной. В данном случае удобно пользоваться вторым методом.

Колебания прямоугольной мембраны. Пусть мембрана натянута на прямоугольном каркасе со сторонами a и b. Краевые и начальные условия формулируются следующими соотношениями:

$$\eta(x,\ y,\ t) = 0 \ \text{ при } \ 0 \leqslant x \leqslant a,\ 0 \leqslant y \leqslant b, \qquad \text{(V.1.7)}$$

$$\eta(x,\ y,\ t)_{|\,t=0} = u(x,\ y),\quad \frac{\partial\eta}{\partial t}_{|\,t=0} = v(x,\ y). \qquad \text{(V.1.8)}$$

Для изучения колебаний прямоугольной мембраны прибегают к уравнению в прямоугольных координатах (V.I.3).

Постановка задачи состоит в том, что надо найти все функции, удовлетворяющие дифференциальному уравнению (V.1.3), граничным и начальным условиям (V.1.7) и (V.1.8).

Ограничим частные решения условием, что они должны быть гармоничными функциями времени:

$$\eta = Z(x,\ y)\,e^{j\omega t}, \quad Z(x,\ y) = X(x)\,Y(y). \qquad \text{(V.1.9)}$$

Подставляя это решение в волновое уравнение, получаем

$$\frac{1}{X}\,\frac{d^2X}{dx^2} + \frac{1}{Y}\,\frac{d^2Y}{dy^2} + \frac{\omega^2}{c^2} = 0, \qquad \text{(V.1.10)}$$

или

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2}=-\frac{\omega^2}{c^2}-\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2}, \qquad (V.1.11)$$

где $c^2=T/\rho$ — действительное положительное число.

В левой части уравнения (V.1.11) стоит функция X, в правой — Y. Так как эти функции равны одна другой, то они будут равны и общему постоянному числу. Отсюда получаем:

$$\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2}+\frac{\omega^2}{c^2}-k^2=0,\quad \frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2}=-k^2, \qquad (V.1.12)$$

или

$$\frac{d^2Y}{dy^2}+\left(\frac{\omega^2}{c^2}-k^2\right)Y=0,\quad \frac{d^2X}{dx^2}+k^2X=0. \qquad (V.1.13)$$

Эти уравнения имеют решения в виде гармонических функций от координат:

$$Y=A_1\cos\left[\left(\frac{\omega^2}{c^2}-k^2\right)^{1/2}y-\varphi_y\right],\quad X=A_2\cos(kx-\varphi_x).$$

Частное решение волнового уравнения имеет вид

$$\eta(x,\ y,\ t)=A\cos(kx-\varphi_x)\cos\left[\left(\frac{\omega^2}{c^2}-k^2\right)^{1/2}y-\varphi_y\right]e^{j\omega t}. \qquad (V.1.14)$$

Первая пара граничных условий ($\eta=0$ при $x=0$ и $y=0$) дает возможность определить постоянные φ_x и φ_y: $\varphi_y=\pi/2$, $\varphi_x=\pi/2$. Подставляя их в (V.1.14), получим

$$\eta=A\sin kx\sin\left\{\left[\left(\frac{\omega^2}{c^2}\right)-k^2\right]^{1/2}y\right\}e^{j\omega t}.$$

Вторая пара ($\eta=0$ при $x=a$ и $y=b$) определяет допустимые волновые числа и допустимые частоты.

При $x=a$ имеем

$$\eta=A\sin ka\sin\left\{\left[\left(\frac{\omega^2}{c^2}\right)-k^2\right]^{1/2}y\right\}\cos(\omega t-\varphi_t)=0.$$

Это уравнение возможно для любых y и t при условии $\sin ka=0$. Отсюда следует

$$k=k_m=\frac{m\pi}{a}. \qquad (V.1.15)$$

При $y=b$

$$\eta=0=A\sin\frac{m\pi}{a}x\sin\left\{\left[\left(\frac{\omega}{c}\right)^2-\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\right]^{1/2}b\right\}\cos(\omega t-\varphi_t),$$

т. е. $\sin\{[(\omega/c)^2-(m\pi/a)^2]^{1/2}b\}=0$, $\quad [(\omega/c)^2-(m\pi/a)^2]^{1/2}=\dfrac{n\pi}{b}$.

В результате допустимые числа k_n определяются выражениями

$$\left[\left(\frac{\omega_{mn}}{c}\right)^2-\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\right]^{1/2}=k_n=\frac{n\pi}{b} \qquad (V.1.16)$$

$(m,\ n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$, а частоты

$$\omega_{mn}^2 = c^2\pi^2\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right),\quad \omega_{mn} = \pi c\sqrt{\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}}. \qquad (V.1.17)$$

Таким образом, с учетом граничных условий частные решения волнового уравнения мембраны представимы в виде

$$\eta = A\sin\frac{m\pi}{a}x\sin\frac{n\pi}{b}y\cos(\omega_{mn}t-\varphi_{mn}), \qquad (V.1.18)$$

или, обозначая

$$A\cos\varphi_{mn} = B_{mn},\quad A\sin\varphi_{mn} = C_{mn},$$

получаем

$$\eta_{mn} = \sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\left[B_{mn}\cos\omega_{mn}t + C_{mn}\sin\omega_{mn}t\right]. \qquad (V.1.19)$$

Здесь, как и в случае решения задач о колебаниях струны, остаются пока неопределенными постоянные B_{mn} и C_{mn}. Их находят из начальных условий. Однако, прежде чем рассматривать этот вопрос, обратим свое внимание на возможные формы колебаний мембраны.

Для анализа вида колебаний частные решения удобно представить следующим образом:

$$\eta_{mn} = \psi_{mn}A_{mn}\cos(\omega_{mn}t-\varphi_{mn}), \qquad (V.1.20)$$

где

$$\psi_{mn} = \sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}. \qquad (V.1.21)$$

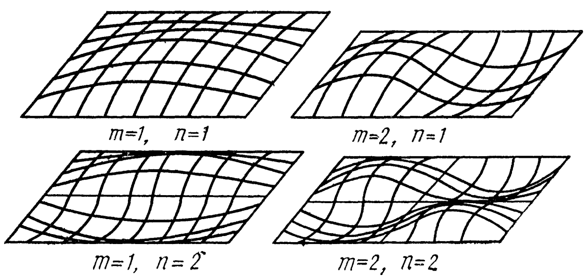

Рис. V.1.3

Функции ψ_{mn} называют *фундаментальными функциями задачи*.

Каждому значению пары чисел m и n соответствует своя фундаментальная функция, которая дает математическое описание формы колебаний мембраны. Например, для $m,\ n=1,1;\ 1,2;\ 2,1$ и $2,2$

$$\psi_{11} = \sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b},\quad \psi_{12} = \sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{2\pi y}{b},$$

$$\psi_{21} = \sin\frac{2\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b},\quad \psi_{22} = \sin\frac{2\pi x}{a}\sin\frac{2\pi y}{b}.$$

Эти формы колебаний представлены на рис. V.1.3.

Общее решение уравнения мембраны состоит из суммы частных решений:

$$\eta=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\psi_{mn}(x,\ y)(B_{mn}\cos\omega_{mn}t+C_{mn}\sin\omega_{mn}t). \quad (V.1.22)$$

Постоянные B_{mn} и C_{mn} определяют по начальным условиям. Допустим, даны начальные смещение и скорость:

$$\eta(x,\ y,\ t)|_{t=0}=u(x,\ y),\quad \frac{\partial\eta(x,\ y,\ t)}{\partial t}\Big|_{t=0}=v(x,\ y). \quad (V.1.23)$$

Их можно разложить в двойной ряд Фурье по фундаментальным функциям:

$$u(x,\ y)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}B_{mn}\psi_{m,\,n}(x,\ y), \quad (V.1.24)$$

$$v(x,\ y)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\omega_{mn}C_{mn}\psi_{mn}(x,\ y). \quad (V.1.25)$$

Используя свойство ортогональности фундаментальных функций

$$\int_0^a\int_0^b\psi_{m'n'}(x,\ y)\psi_{mn}(x,\ y)\,dx\,dy=\begin{cases}\dfrac{ab}{4} & \text{при } \begin{matrix}m'=m,\\ n'=n;\end{matrix}\\ 0 & \text{при } \begin{matrix}m'\neq m,\\ n'\neq 0,\end{matrix}\end{cases} \quad (V.1.26)$$

легко получить соотношения для вычисления коэффициентов B_{mn} и C_{mn}. Для этой цели умножим правую и левую части рядов (V.1.24) и (V.1.25) на $\psi_{m'n'}dxdy$ и проинтегрируем по x и y от 0 до a и от 0 до b. Вследствие условия ортогональности в правой части будет отличаться от нуля только тот интеграл, у которого индексы фундаментальных функций совпадают, т. е.

$$\int_0^a\int_0^b u(x,\ y)\psi_{mn}(x,\ y)\,dx\,dy=\frac{ab}{4}B_{mn},$$

$$\int_0^a\int_0^b v(x,\ y)\psi_{mn}(x,\ y)\,dx\,dy=\omega_{mn}\frac{ab}{4}C_{mn}.$$

Тогда для вычисления коэффициентов имеем:

$$B_{mn}=\frac{4}{ab}\int_0^a\int_0^b u(x,\ y)\psi_{mn}(x,\ y)\,dx\,dy=\frac{4}{ab}\int_0^a\int_0^b u(x,\ y)\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\,dx\,dy,$$

$$(V.1.27)$$

$$C_{mn}=\frac{4}{\omega_{mn}ab}\int_0^a\int_0^b v(x,\ y)\psi_{mn}\,dx\,dy=\frac{4}{\omega_{mn}ab}\int_0^a\int_0^b v(x,\ y)\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{m\pi y}{b}\,dx\,dy\,.$$

Колебания круглой мембраны. Если мембрана натянута на круглом каркасе, то задачу о ее поперечном колебании удобно решать в полярных координатах. Пусть уравнение мембраны (IV.1.6) имеет начальные условия

$$\eta(r,\ \varphi)|_{t=0}=u(r,\ \varphi),\quad \frac{\partial\eta}{\partial t}\Big|_{t=0}=v(r,\ \varphi). \quad (V.1.28)$$

Если положить частное решение в виде гармонической функции времени $\eta = \zeta(r, \varphi) e^{j\omega t}$, то уравнение мембраны преобразуется в уравнение Гельмгольца относительно функции $\zeta(r, \varphi)$:

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \zeta}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \zeta}{\partial \varphi^2} + k^2 \zeta = 0. \qquad \text{(V.1.29)}$$

Функция $\zeta(r, \varphi)$ — периодическая относительно угла φ с периодом 2π. Поэтому ее можно представить в виде ряда Фурье:

$$\zeta = R_0 + \sum_{m=1}^{\infty} (R_m \cos m\varphi + S_m \sin m\varphi). \qquad \text{(V.1.30)}$$

В результате подстановки этого ряда в уравнение (V.1.29) можно убедиться, что каждый член ряда удовлетворяет данному уравнению и является частным решением этого уравнения. Подставляя частное решение

$$\zeta_m = R_m \cos m\varphi, \qquad \text{(V.1.31)}$$

получаем для функции $R_m(r)$

$$\frac{d^2 R_m}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dR_m}{dr} + \left(k^2 - \frac{m^2}{r^2}\right) R_m = 0. \qquad \text{(V.1.32)}$$

Считая, что $r = z/k$, уравнение (V.1.31) приведем к уравнению Бесселя m-го порядка:

$$\frac{d^2 R_m}{dz^2} + \frac{1}{z}\frac{dR_m}{dz} + \left(1 - \frac{m^2}{z^2}\right) R_m = 0.$$

Решениями его являются функции Бесселя и Неймана m-го порядка. Функция Неймана при $z = 0$ обращается в $-\infty$, поэтому она не отвечает физическим условиям и в дальнейшем не используется. Частное решение уравнения (V.1.32) представим только через функцию Бесселя:

$$R_m(r) = A_m \mathcal{J}_m(z) = A_m \mathcal{J}_m(kr), \qquad \text{(V.1.32')}$$

где $\mathcal{J}_m(z) = \frac{z}{2^m m!}\left\{1 - \frac{z^2}{2(2m+2)} + \frac{z^4}{2 \cdot 4 (2m+2)(2m+4)} - \right.$

$$\left. - \frac{z^6}{2 \cdot 4 \cdot 6 (2m+2)(2m+4)(2m+6)} + \ldots \right\}.$$

Таким образом, частное решение имеет вид

$$\zeta_{m(1)} = A_m \mathcal{J}_m(kr) \cos m\varphi \qquad (m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Если в качестве частного решения выбрать $\zeta_{m(2)} = S_m \sin m\varphi$ и определить, как и ранее, амплитуды $S_m(kr)$, то мы убедимся, что они выражаются также функциями Бесселя m-го порядка:

$$S_m = B_m \mathcal{J}_m(kr) \qquad (m = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots).$$

В итоге частное решение уравнения Гельмгольца имеет вид

$$\zeta_m = \mathcal{J}_m(kr)(A_m \cos m\varphi + B_m \sin m\varphi) \qquad (m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

На границе $kr = ka$, $\zeta(r, \varphi) = 0$, поэтому уравнению удовлетворяют только те значения k, для которых $\mathscr{J}_m(ka) = 0$. Решения этих уравнений:

$$k_{mn}a = \pi\beta_{mn}, \quad k_{mn} = \frac{\pi\beta_{mn}}{a},$$

где

$$\beta_{01} = 0{,}7655; \quad \beta_{02} = 1{,}7571; \quad \beta_{03} = 2{,}7546;$$
$$\beta_{11} = 1{,}2197; \quad \beta_{12} = 2{,}2331; \quad \beta_{13} = 3{,}2383;$$
$$\beta_{21} = 1{,}6348; \quad \beta_{22} = 2{,}6792; \quad \beta_{23} = 3{,}6988.$$

Собственным волновым числам k_{mn} соответствуют собственные частоты:

$$\omega_{mn} = k_{mn}c = \frac{\pi\beta_{mn}c}{a}.$$

Таким образом, частное решение колебаний мембраны можно представить в виде

$$\eta_{mn}(r, \varphi, t) = \psi_{mn}(r, \varphi)\cos(\omega_{mn}t + \alpha_{mn}) =$$
$$= \psi_{mn}(r, \varphi)\left[a_{mn}\cos\left(\frac{\pi\beta_{mn}c}{a}t\right) + b_{mn}\sin\left(\frac{\pi\beta_{mn}c}{a}t\right)\right], \quad \text{(V.1.33)}$$

где

$$\psi_{mn}(r, \varphi) = \mathscr{J}_m(k_{mn}r)\begin{matrix}\cos m\varphi\\ \sin m\varphi\end{matrix} = \mathscr{J}_m\left(\pi\beta_{mn}\frac{r}{a}\right)\begin{matrix}\cos m\varphi\\ \sin m\varphi.\end{matrix}$$

Найдем узловые линии на поверхности мембраны, соответствующие mn-й моде колебаний. С этой целью достаточно решить уравнение $\psi_{mn} = 0$ относительно r и φ, т. е. уравнение

$$\mathscr{J}_m\left(\pi\beta_{mn}\frac{r}{a}\right)\begin{matrix}\cos m\varphi\\ \sin m\varphi\end{matrix} = 0,$$

где верхняя строчка относится к симметричным модам (с), а нижняя к несимметричным (н).

Уравнения (V.4.13) распадаются на три группы:

$$\mathscr{J}_m(\pi\beta_{mn}r/a) = 0, \quad \text{(V.1.34)}$$
$$\cos m\varphi = 0, \quad \text{(V.1.35)}$$
$$\sin m\varphi = 0, \quad \text{(V.1.36)}$$

где $m = 0, 1, 2, \ldots$

Корни первой группы уравнений ($m = 0, 1, 2, \ldots$ и $n = 1, 2, 3, \ldots$) позволяют вычислить радиусы узловых окружностей: $\pi\beta_{mn}r_{mi}/a = \pi\beta_{mi}$, откуда

$$r_{mi} = a\frac{\beta_{mi}}{\beta_{mn}}, \quad \text{(V.1.37)}$$

где корни должны удовлетворять неравенству $\beta_{mi} \leqslant \beta_{mn}$.

Очевидно, радиус $r_{mn} = \beta_{mn}a/\beta_{mn} = a$ при $i = n$. Если подсчитать все узловые окружности, то получим для числа узловых окружностей mn-й моды $n - 1$.

Таким образом, число узловых окружностей mn-й моды колебаний мембраны не зависит от числа m и равно $n - 1$.

Корни уравнений (V.1.35) и (V.1.36) позволяют вычислить значения углов $\varphi_{mi\,(c)}$ и $\varphi_{mi\,(н)}$, для которых образуются узловые радиусы:

$$\varphi_{mi}=\frac{i\pi}{2m}, \tag{V.1.38}$$

где $i=2l-1$ для н-мод и $i=2l$ для с-мод.

Отсюда следует, что число узловых диаметров равно m. На рис. V.1.4 изображены формы колебаний круглой мембраны, отвечающие следующим функциям:

$$\psi_{01}=\mathscr{J}_0(\pi\beta_{01},\ r/a);\ \psi_{02}=\mathscr{J}_0(\pi\beta_{02}r/a);\ \psi_{11}=\mathscr{J}_1(\pi\beta_{11}r/a)\cos\varphi;$$
$$\psi_{12}=\mathscr{J}_1(\pi\beta_{12}-r/a)\cos\varphi.$$

Знаки «+» и «—» показывают направления отклонения плоскости участков мембраны. Линии r_{01}, r_{11}, φ_1, φ_2 — места, где смещение мембраны равно нулю (узловые линии).

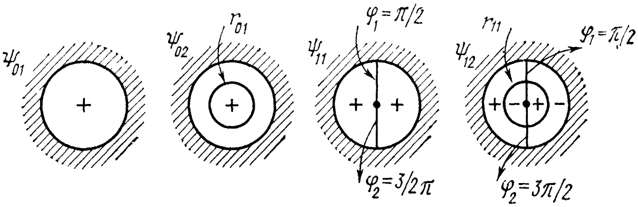

Рис. V.1.4

Общее решение поперечных колебаний круглой мембраны может быть найдено, если воспользоваться начальными условиями (V.1.28) и свойством ортогональности фундаментальных функций круглой мембраны:

$$\int_0^1\int_0^{2\pi}\psi_{mn}(r',\ \psi)\,\psi_{mk}(r',\ \varphi)\,r'\,dr'\,d\varphi=\begin{cases}0 & \text{при } n\neq k,\\ \varepsilon_m\dfrac{\pi}{2}\left[\mathscr{J}'_m(\pi\beta_{mn})\right]^2 & \text{при } n=k,\end{cases}$$

где

$$\varphi_{mn}(r',\ \varphi)=\mathscr{J}_m(\pi\beta_{mn}r')\cos n\varphi,\ \ \psi_{mk}(r',\ \varphi)=\mathscr{J}_m(\pi\beta_{mk}r')\cos k\varphi,$$

$$r'=\frac{r}{a},\quad \varepsilon_m=\begin{cases}1 & \text{при}\quad m\neq 0,\\ 2 & \text{при}\quad m=0.\end{cases}$$

Эти формулы выводят с учетом условий ортогональности тригонометрических функций и функций Бесселя m-го порядка [см. прил.]

Общее решение уравнения круглой мембраны для симметричных мод может быть выражено функциями смещения $\eta_{(c)}(r,\ \varphi,\ t)$ и скорости $\partial\eta_{(c)}/\partial t$:

$$\eta_{(c)}=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\psi_{mn}(r,\ \varphi)\,(C_{mn}\cos\omega_{mn}t+D_{mn}\sin\omega_{mn}t),$$

$$\frac{\partial\eta_{(c)}}{\partial t}=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\psi_{mn}(r,\ \varphi)\,\omega_{mn}(D_{mn}\cos\omega_{mn}t+C_{mn}\sin\omega_{mn}t).$$

Совмещая его с начальными условиями

$$\eta_{c}\big|_{t=0}=u(r,\ \varphi),\ \frac{\partial\eta_{(c)}}{\partial t}\Big|_{t=0}=v(r,\ \varphi), \qquad (V.1.39)$$

получим

$$\begin{aligned} u(r,\ \varphi)&=\sum_{m,\ n}\psi_{mn}(r,\ \varphi)\,C_{mn},\\ v(r,\ \varphi)&=\sum_{m,\ n}\omega_{mn}\psi_{mn}(r,\ \varphi)\,D_{mn}. \end{aligned} \qquad (V.1.40)$$

Умножим каждое из равенств (V.1.40) на $\psi_{mk}(r,\ \varphi)\,r\,dr\,d\varphi$ и проинтегрируем правую и левую части в пределах от 0 до a и от 0 до 2π. В результате использования свойства ортогональности функций ψ_{mn} и ψ_{mk} получим из первого равенства

$$\sum_{m=0}^{\infty}\int_0^a\int_0^{2\pi}u(r,\ \varphi)\,\psi_{mk}(r,\ \varphi)\,r\,d\,r\,d\,\varphi=$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}C_{mn}\int_0^a\int_0^{2\pi}\psi_{mn}(r,\ \varphi)\,\psi_{mk}(r,\ \varphi)\,r\,dr\,d\varphi=$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon_m C_{mn}\frac{\pi a^2}{2}\left[\mathscr{J}'_m(\pi\beta_{mn})\right]^2. \qquad (V.1.41)$$

Тождество (V.1.41) выполняется, если для каждого слагаемого ряда применимо условие

$$\varepsilon_m C_{mn}\frac{\pi a^2}{2}\left[\mathscr{J}'_m(\pi\beta_{mn})\right]^2=\int_0^a\int_0^{2\pi}u(r,\ \varphi)\,\psi_{mn}(r,\ \varphi)\,r\,dr\,d\varphi.$$

Следовательно,

$$C_{mn}=\frac{2}{\varepsilon_m\pi a^2\left[\mathscr{J}'_m(\pi\beta_{mn})\right]^2}\int_0^a\int_0^{2\pi}u(r,\ \varphi)\,\psi_{mn}r\,dr\,d\varphi. \qquad (V.1.42)$$

Пользуясь вторым начальным условием, нетрудно получить формулы для вычисления постоянных D_{mn}:

$$\varepsilon_m D_{mn}=\frac{2}{\pi a^2}\,\frac{1}{\omega_{mn}}\,\frac{1}{\left[\mathscr{J}'_m(\pi\beta_{mn})\right]^2}\int_0^a\int_0^{2\pi}v(r,\ \varphi)\,\psi_{mn}(r,\ \varphi)\,rd\,rd\,\varphi, \qquad (V.1.43)$$

$$\varepsilon_m=\begin{cases}1 & \text{при}\quad m\neq 0,\\ 2 & \text{при}\quad m=0.\end{cases}$$

Аналогично получают формулы для общего решения несимметричных форм колебаний мембраны.

Энергия колебания мембраны. Полная энергия колебаний мембраны состоит из суммы кинетической и потенциальной энергий. Выделим из поверхности мембраны элемент площади ΔS, смещенный от положения равновесия на величину η и имеющий скорость $\partial\eta/\partial t$.

Кинетическая энергия этого элемента поверхности равна

$$\Delta W_{\text{к}} = \frac{\rho}{2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)^2 \Delta x\,\Delta y.$$

где ρ — поверхностная плотность мембраны, $\Delta x\,\Delta y = \Delta S$ — площадь элемента.

Переходя к пределу, получаем формулу для кинетической энергии элемента мембраны:

$$dW_{\text{к}} = \frac{\rho}{2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)^2 dx\,dy. \qquad \text{(V.1.44)}$$

Пусть в положении равновесия элемент площади $\Delta x\,\Delta y$ (рис. V.1.5, *а*) находится под действием сил натяжения $T\Delta y$ и $T\Delta x$.

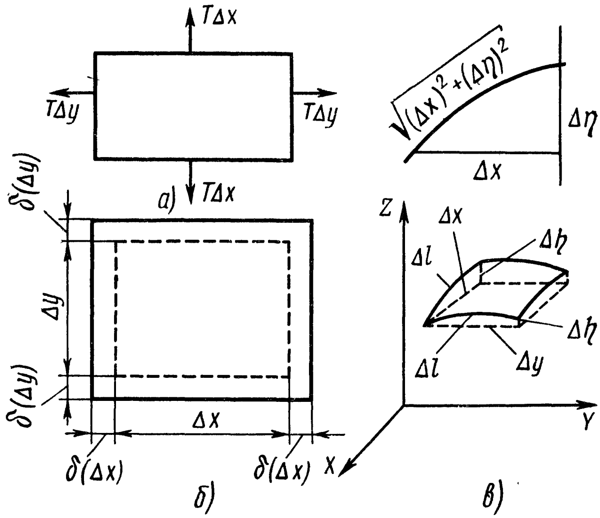

Рис. V.1.5

После смещения от положения равновесия произойдет растяжение сторон этого элемента (рис. V.1.5, *б*), а силы натяжения произведут работу растяжения:

$$\frac{T\,\Delta y\,\delta(\Delta x)}{2} + \frac{T\,\Delta y\,\delta(\Delta x)}{2} = T\,\Delta y \delta(\Delta x),$$

$$\frac{T\,(\Delta x + 2\delta\,\Delta x)\,\delta(\Delta y)}{2} + \frac{T\,(\Delta x + 2\delta\,\Delta x)\,\delta(\Delta y)}{2} =$$

$$= T\,(\Delta x + 2\delta\,\Delta x) = T\,\Delta x\,\delta(\Delta y) + 2T\delta(\Delta x)\,\delta(\Delta y).$$

Полная работа сил растяжения равна

$$\delta A = T\,\Delta x\,\delta(\Delta y) + T\,\Delta y\,\delta(\Delta x) + 2T\delta(\Delta x)\,\delta(\Delta y),$$

или, отбрасывая слагаемое второго порядка,

$$\delta A \approx T\,\Delta x\,\delta(\Delta y) + T\,\Delta y\,\delta(\Delta x).$$

Приращения $\delta(\Delta y)$ и $\delta(\Delta x)$ вычисляют по следующим формулам (рис. V.1.5, *в*):

$$\delta(\Delta y)=\sqrt{(\Delta y)^2+(\Delta x)^2}-\Delta y=\Delta y\left[\sqrt{1+\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2}-1\right]\approx$$

$$\approx\Delta y\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2-1\right]=\frac{1}{2}\Delta y\left(\frac{\partial\eta}{\Delta y}\right)^2,$$

$$\delta(\Delta x)=\sqrt{(\Delta y)^2+(\Delta x)^2}-\Delta x\approx\frac{1}{2}\Delta x\left(\frac{\Delta\eta}{\Delta x}\right)^2.$$

Таким образом, работа сил натяжения

$$\delta A=\frac{T}{2}\left[\left(\frac{\Delta\eta}{\Delta x}\right)^2+\left(\frac{\Delta\eta}{\Delta y}\right)^2\right]\Delta x\,\Delta y.$$

Приравнивая работу δA изменению потенциальной энергии элемента мембраны при растяжении и переходя к пределу, получаем

$$dW_{\text{п}}=\frac{T}{2}\left[\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy. \tag{V.1.45}$$

Полная энергия элемента поверхности мембраны равна

$$dW=dW_{\text{к}}+dW_{\text{п}}.$$

Учитывая (V.1.45) и проинтегрировав dW по всей поверхности мембраны, получим полную энергию

$$W=\frac{\rho}{2}\int_0^a\int_0^b\left(\frac{\partial\eta}{\partial t}\right)^2dx\,dy+\frac{T}{2}\int_0^a\int_0^b\left[\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy. \tag{V.1.46}$$

Используя общее решение $\eta(x,\ y,\ t)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}A_{mn}\sin\frac{m\pi x}{a}\times$ $\times\sin\frac{n\pi y}{b}\cos\left(\sqrt{\left(\frac{m\pi c}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi c}{b}\right)^2}\,t+\alpha_{mn}\right)$, приводим уравнение (V.1.46) к виду

$$W=\frac{\rho}{2}\left\{\sum_{m,\,n}\sqrt{\left(\frac{m\pi c}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi c}{b}\right)^2}\,A_{mn}\times\right.$$

$$\left.\times\int_0^a\int_0^b\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\,dx\,dy\sin(\omega_{mn}t+\alpha_{mn})\right\}^2+$$

$$+\frac{T}{2}\left(\sum A_{mn}\frac{m\pi}{a}\cos(\omega_{mn}t+\alpha_{mn})\int_0^a\int_0^b\cos\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi x}{b}\,dx\,dy\right)^2+$$

$$+\frac{T}{2}\left(\sum A_{mn}\frac{n\pi}{b}\cos(\omega_{mn}t+\alpha_{mn})\int_0^a\int_0^b\sin\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}\,dx\,dy\right)^2.$$

Первая двойная сумма содержит попарные произведения:

$$A_{mn}\sqrt{\left(\frac{m\pi c}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi c}{b}\right)^2}\sin(\omega_{mn}t+\alpha_{mn})\times$$
$$\times A_{m'n'}\sqrt{\left(\frac{m'\pi c}{a}\right)^2+\left(\frac{n'\pi c}{b}\right)^2}\sin(\omega_{m'n'}t+\alpha_{m'n'})\int_0^a\int_0^b\sin\frac{m\pi x}{a}\times$$
$$\times\sin\frac{n\pi y}{b}\sin\frac{m'\pi x}{a}\sin\frac{n'\pi y}{b}\,dx\,dy.$$

Ввиду ортогональности фундаментальных функций из всех этих произведений останутся только те, для которых $m'=m$; $n'=n$:

$$\frac{ab}{4}A_{mn}^2\left[\left(\frac{m\pi c}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi c}{b}\right)^2\right]\sin^2(\omega_{mn}t+\alpha_{mn}).$$

Точно так же из всех слагаемых оставшихся двойных сумм сохраняются только те попарные произведения, для которых $m=m'$ и $n=n'$, так что каждая из них имеет слагаемыми члены

$$\frac{ab}{4}A_{mn}^2\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\cos^2(\omega_{mn}t+\alpha_{mn}),$$
$$\frac{ab}{4}A_{mn}^2\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\cos^2(\omega_{mn}t+\alpha_{mn}).$$

Таким образом, полная энергия колебаний мембраны

$$W=\frac{\rho}{2}\sum\left[\left(\frac{m\pi c}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi c}{b}\right)^2\right]\sin^2(\omega_{mn}t+\alpha_{mn})+$$
$$+\frac{T}{2}\sum\left(\frac{m\pi}{2}\right)^2\cos(\omega_{mn}t+\alpha_{mn})\frac{ab}{4}+$$
$$+\frac{T}{2}\sum\left(\frac{n\pi}{2}\right)^2\cos^2(\omega_{mn}t+\alpha_{mn})\frac{ab}{4}.$$

Заменяя силу натяжения T величиной ρc^2, после группировки слагаемых получим

$$W=\frac{ab\rho}{4}\cdot\frac{1}{2}\sum_{mn}^{\infty}\omega_{mn}^2A_{mn}^2,$$

где $\omega_{mn}^2=(m\pi c/a)^2+(n\pi c/b)^2$; ρab — масса мембраны.

Полная энергия колебаний мембраны равна сумме энергий колебаний осцилляторов, каждый из которых имеет массу, равную $^1/_4$ массы всей мембраны, амплитуду и частоту, равные амплитуде A_{mn} и частоте ω_{mn}. Этот результат не зависит от формы мембраны, и его можно получить в общем виде, если известно условие ортогональности фундаментальных функций.