

§ V.2. ПОПЕРЕЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПЛАСТИН

Частное решение волнового уравнения. В пластинах упругость напряжения мала по сравнению с упругостью формы. Поперечные колебания пластин описывают дифференциальным уравнением четвертого порядка:

$$\nabla^4 \eta + \frac{3\rho(1-\sigma^2)}{Eh} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = 0,$$

где

$$\nabla^4 = \Delta^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)^2 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2}; \quad (\text{V.2.1})$$

∇^4 — оператор производной четвертого порядка; σ — коэффициент Пуассона; ρ — плотность материала пластины; E — модуль Юнга; h — половина толщины пластины; η — смещение в средней плоскости пластины; t — время.

Пусть частное решение выражается гармонической зависимостью от времени:

$$\eta = Y(x, y) e^{j\omega t}. \quad (\text{V.2.2})$$

В этом случае после подстановки в уравнение (V.2.1) получим

$$\nabla^4 Y - \gamma^4 Y = 0, \quad (\text{V.2.3})$$

где

$$\gamma^4 = \omega^2 \frac{3\rho(1-\sigma^2)}{Eh^2}. \quad (\text{V.2.4})$$

Уравнение (V.2.3) можно представить как $(\nabla^2 - \gamma^2)(\nabla^2 + \gamma^2)Y = 0$ и привести к двум уравнениям второго порядка:

$$(\nabla^2 - \gamma^2)Y = 0, \quad (\nabla^2 + \gamma^2)Y = 0. \quad (\text{V.2.5})$$

Дальнейший ход решения зависит от характера краевых условий. Исследуем колебания круглой пластины. Для этого решение уравнений (V.2.5) будем искать в полярных координатах.

Для первого уравнения (V.2.5) решение конечное и при $0 \leq r \leq a$ имеет вид

$$Y_m = \frac{\cos m\varphi}{\sin m\varphi} \mathcal{J}_m(\gamma r), \quad (\text{V.2.6})$$

где $m = 0, 1, 2, 3, \dots$

Решение второго уравнения (V.2.5) выражается через функцию Бесселя от мнимого аргумента:

$$\tilde{Y}_m = \frac{\cos m\varphi}{\sin m\varphi} \mathcal{J}_m(j\gamma r), \quad (\text{V.2.7})$$

где $\mathcal{J}_m(j\gamma r)$ — функция Бесселя первого рода m -го порядка.

Функции мнимого аргумента можно выразить через гиперболические функции Бесселя по формуле $I_m(\gamma r) = j^m \mathcal{J}_m(j\gamma r)$.

Всевозможные простые решения для круглых пластин представляют в виде суммы решений (V.2.7) и (V.2.6):

$$Y_m = \frac{\cos}{\sin} m\varphi [A_m \mathcal{J}_m(\gamma r) + B_m I_m(\gamma r)], \quad (\text{V.2.8})$$

где $m = 0, 1, 2, 3, \dots$

Таким образом, в соответствии с числом значений m имеется счетное множество возможных решений.

Определение постоянных интегрирования. Для определения постоянных A_m , B_m и допустимых значений параметра γ необходимо задать граничные условия. Примем условия для края, зажатого по окружности:

$$Y_m(a, \varphi) = 0, \quad \left(\frac{\partial Y}{\partial r} \right) \Big|_{r=a} = 0, \quad (\text{V.2.9})$$

где a — радиус пластины.

Применяя к (V.2.8) первое условие, находим

$$B_m = -A_m \left[\frac{\mathcal{J}_m(\gamma a)}{I_m(\gamma a)} \right]. \quad (\text{V.2.10})$$

Производная

$$\begin{aligned} \frac{\partial Y}{\partial r} &= \frac{\cos}{\sin} (m\varphi) \gamma [A_m \mathcal{J}'_m(\gamma r) + B_m I'_m(\gamma r)] = \\ &= \frac{\cos}{\sin} (m\varphi) \gamma A_m \left[\mathcal{J}'_m(\gamma r) - \frac{\mathcal{J}_m(\gamma a)}{I_m(\gamma a)} I'_m(\gamma r) \right] \end{aligned}$$

в применении второго краевого условия дает бесконечно большое число уравнений

$$I_m(\gamma a) \mathcal{J}'_m(\gamma a) - \mathcal{J}_m(\gamma a) I'_m(\gamma a) = 0. \quad (\text{V.2.11})$$

Собственные частоты и фундаментальные функции. Решение каждого из уравнений (V.2.4) относительно γa может быть представлено в виде

$$\gamma_{mn} = \frac{\pi}{a} \beta_{mn} \quad (m, n = 0, 1, 2, 3, \dots), \quad (\text{V.2.12})$$

где β_{mn} имеют следующие значения:

$$\begin{aligned} \beta_{01} &= 1,015; & \beta_{02} &= 2,007; & \beta_{03} &= 3,000; \\ \beta_{11} &= 1,468; & \beta_{12} &= 2,483; & \beta_{13} &= 3,490; \\ \beta_{21} &= 1,879; & \beta_{22} &= 2,992; & \beta_{23} &= 2,000. \end{aligned}$$

При $n \rightarrow \infty$ $\beta_{mn} \rightarrow n + m/2$.

Имея в виду, что параметр γ зависит от частоты, по формуле (V.2.4) получаем

$$\omega_{mn} = \gamma_{mn}^2 \hbar \sqrt{\frac{E}{3\rho(1-\sigma^2)}}, \quad (\text{V.2.13})$$

или

$$\omega_{mn} = \frac{\pi^2 \hbar}{a^2} \beta_{mn}^2 \sqrt{\frac{E}{3\rho(1-\sigma^2)}},$$

откуда

$$f_{mn} = \frac{\omega_{mn}}{2\pi} = \frac{\pi \hbar}{2a^2} \beta_{mn}^2 \sqrt{\frac{E}{3\rho(1-\sigma^2)}}.$$

В частности,

$$\begin{aligned} f_{01} &= 0,9342 \frac{h}{a^2} \sqrt{\frac{E}{3\rho(1-\sigma^2)}}; \\ f_{02} &= 3,309f_{01}; \quad f_{11} = 2,09f_{01}; \\ f_{21} &= 3,426f_{01}; \quad f_{22} = 5,983f_{01}. \end{aligned} \quad (\text{V.2.14})$$

Простейшие формы колебаний пластины описывают фундаментальными функциями (V.2.8). Если вместо A_m и B_m подставить значения, найденные из граничных условий, то получим два вида фундаментальных функций:

$$\psi_{mn(c)} = \cos m\varphi \left[\mathcal{I}_m(\pi\beta_{mn}r') - \frac{\mathcal{I}'_m(\pi\beta_{mn})}{I_m(\pi\beta_{mn})} I_m(\pi\beta_{mn}r') \right], \quad (\text{V.2.15})$$

$$\psi_{mn(n)} = \sin m\varphi \left[\mathcal{I}_m(\pi\beta_{mn}r') - \frac{\mathcal{I}'_m(\pi\beta_{mn})}{I_m(\pi\beta_{mn})} I_m(\pi\beta_{mn}r') \right], \quad (\text{V.2.16})$$

причем (V.2.15) представляет собой четную функцию, а (V.2.16) — нечетную.

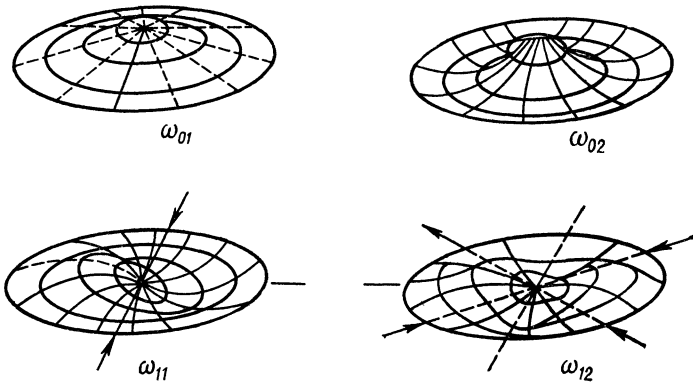


Рис. V.2.1

Фундаментальные функции $\psi_{mn(c)}$ и $\psi_{mn(n)}$ имеют следующее свойство:

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \int_0^{2\pi} \psi_{mn}(r', \varphi) \psi_{m'n'}(r', \varphi) r' dr' d\varphi = \\ & = \begin{cases} 0 & \text{при } m' \neq m, n' \neq n, \\ \frac{\pi}{2} [\mathcal{I}'_m{}^2(\pi\beta_{mn}) + I_m{}^2(\pi\beta_{mn})] & \text{при } m' = m, n' = n. \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{V.2.17})$$

Анализ колебаний круглой пластины показывает, что число, соответствующее порядку бesselевой функции, совпадает с числом узловых окружностей, за исключением граничной. Число n , соответствующее порядковому номеру решения характеристического уравнения (V.2.11), совпадает с числом узловых диаметров без единицы. На рис. V.2.1 показаны некоторые формы колебаний круглой пластины.

Общее решение уравнения пластины состоит из суммы всех частных решений. Частные решения представим в виде

$$\begin{aligned}\tilde{\eta}_{mn}(r, \varphi, t) &= Y_{mn}(r, \varphi) \tilde{A}_{mn} e^{j\omega t} = Y_m(r, \varphi) A_{mn} e^{-j\alpha_{mn}} e^{j\omega t} = \\ &= Y_{mn}(r, \varphi) A_{mn} e^{j(\omega_{mn}t - \alpha_{mn})}.\end{aligned}$$

Используем только действительную часть этой комплексной функции. Подставляя вместо $Y_{mn}(r, \varphi)$ фундаментальные функции (V.2.15) и (V.2.16), найдем частные решения:

$$\begin{aligned}\eta_{mn(c)}(r, \varphi, t) &= A_{mn} \left[\mathcal{I}_m \left(\pi \beta_{mn} \frac{r}{a} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\mathcal{I}_m(\pi \beta_{mn})}{I_m(\pi \beta_{mn})} I_m \left(\pi \beta_{mn} \frac{r}{a} \right) \right] \cos m\varphi \cos(\omega_{mn}t - \alpha_{mn}), \\ \eta_{mn(n)}(r, \varphi, t) &= A_{mn} \left[\mathcal{I}_m \left(\pi \beta_{mn} \frac{r}{a} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\mathcal{I}_m(\pi \beta_{mn})}{I_m(\pi \beta_{mn})} I_m \left(\pi \beta_{mn} \frac{r}{a} \right) \right] \sin m\varphi \cos(\omega_{mn}t - \alpha_{mn})\end{aligned}$$

для симметричных и несимметричных колебаний, где $\omega_{mn} = \frac{\pi h}{a} \times \sqrt{\frac{E}{3\rho(1-\sigma^2)}} \beta_{mn}^3$.

Введем в частное решение фундаментальную функцию ψ_{mn} и получим

$$\begin{aligned}\eta_{mn} &= A_{mn} \psi_{mn}(\pi \beta_{mn} r', \varphi) \cos(\omega_{mn}t - \varphi_{mn}) = \\ &= \psi_{mn}(\pi \beta_{mn} r', \varphi) [B_{mn} \cos \omega_{mn}t + C_{mn} \sin \omega_{mn}t],\end{aligned}\quad (\text{V.2.18})$$

где

$$A_{mn} = \sqrt{B_{mn}^2 + C_{mn}^2}; \quad \text{tg } \varphi_{mn} = \frac{C_{mn}}{B_{mn}};\quad (\text{V.2.19})$$

$$\psi_{mn}(\pi \beta_{mn} r', \varphi) = \left[\mathcal{I}_m(\pi \beta_{mn} r') - \frac{\mathcal{I}_m(\pi \beta_{mn})}{I_m(\pi \beta_{mn})} \right] \cos m\varphi, \sin m\varphi,$$

$\pi \beta_{mn}$ — корни характеристического уравнения (V.2.11), $r' = r/a$; a — радиус пластины.

Общее решение имеет вид двойного ряда

$$\eta(r, \varphi, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \psi_{mn}(\pi \beta_{mn} r') [B_{mn} \cos \omega_{mn}t + C_{mn} \sin \omega_{mn}t].\quad (\text{V.4.20})$$

Для нахождения коэффициентов B_{mn} и C_{mn} воспользуемся начальными условиями

$$\begin{aligned}\eta(r, \varphi, t)|_{t=0} &= U(r, \varphi), \\ \frac{\partial \eta}{\partial t}|_{t=0} &= V(r, \varphi)\end{aligned}\quad (\text{V.2.21})$$

и условием ортогональности (V.2.17). В результате получим

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} U(r', \varphi) \psi_{mn}(\pi \beta_{mn} r') r' dr' d\varphi = \frac{\pi}{2} \{ [\mathcal{I}'_m(\pi \beta_{mn})]^2 + [I'_m(\pi \beta_{mn})]^2 \} B_{mn},$$

откуда

$$B_{mn} = \frac{2}{\pi} \frac{\int_0^1 \int_0^{2\pi} U(r', \varphi) \Psi(\pi\beta_{mn}r') r' dr' d\varphi}{[\mathcal{I}'_m(\pi\beta_{mn})]^2 + [I'_{mn}(\pi\beta_{mn})]^2}. \quad (\text{V.2.22})$$

Кроме того, на основании второго граничного условия получаем

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} v(r', \varphi) \Psi_{mn}(\pi\beta_{mn}r') r' dr' d\varphi = \omega_{mn} C_{mn} \frac{\pi}{2} \{[\mathcal{I}'_m(\pi\beta_{mn})]^2 + [I'_{mn}(\pi\beta_{mn})]^2\}.$$

Отсюда следует интегральная формула для C_{mn} :

$$C_{mn} = \frac{2}{\pi\omega_{mn}} \frac{\int_0^1 \int_0^{2\pi} v(r', \varphi) \Psi_{mn}(\pi\beta_{mn}r', \varphi) r' dr' d\varphi}{[\mathcal{I}'_m(\pi\beta_{mn})]^2 + [I'_{mn}(\pi\beta_{mn})]^2}. \quad (\text{V.2.23})$$

Энергия колебаний пластины. Можно показать, что независимо от контура полная энергия колебаний пластины, определяемая формулой

$$W = \frac{M}{4} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_{mn}^2 \omega_{mn}^2, \quad (\text{V.2.24})$$

равна сумме энергий осцилляторов с частотами ω_{mn} , амплитудами $A_{mn} = \sqrt{B_{mn}^2 + C_{mn}^2}$ и массой, составляющей $1/4$ массы пластины.

ГЛАВА VI

РАСПРОСТРАНЕНИЕ УПРУГИХ ВОЛН В ЖИДКОСТЯХ И ГАЗАХ

§ VI.1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

В предыдущих главах были рассмотрены колебания ограниченных упругих тел с распределенными параметрами. На примере струны, закрепленной на концах, было показано, что смещение частиц струны, возникшее в начальный момент времени в каком-либо месте, распространяется вдоль струны в обоих противоположных направлениях в виде поперечных упругих волн, которые, многократно отражаясь от противоположных концов, в результате сложения образуют поперечные колебания с определенным набором частот, амплитуд и начальных фаз. В этой главе будут исследованы основные законы распространения упругих волн в пространстве, когда среду можно считать безграничной. Для начала в качестве упругой среды примем жидкости и газы.

В отличие от упругих твердых тел жидкости не способны сдерживать напряжения сдвига. В результате жидкости не имеют своей