

откуда

$$B_{mn} = \frac{2}{\pi} \frac{\int_0^1 \int_0^{2\pi} U(r', \varphi) \Psi(\pi\beta_{mn}r') r' dr' d\varphi}{[\mathcal{I}'_m(\pi\beta_{mn})]^2 + [I'_{mn}(\pi\beta_{mn})]^2}. \quad (\text{V.2.22})$$

Кроме того, на основании второго граничного условия получаем

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} v(r', \varphi) \Psi_{mn}(\pi\beta_{mn}r') r' dr' d\varphi = \omega_{mn} C_{mn} \frac{\pi}{2} \{[\mathcal{I}'_m(\pi\beta_{mn})]^2 + [I'_{mn}(\pi\beta_{mn})]^2\}.$$

Отсюда следует интегральная формула для C_{mn} :

$$C_{mn} = \frac{2}{\pi\omega_{mn}} \frac{\int_0^1 \int_0^{2\pi} v(r', \varphi) \Psi_{mn}(\pi\beta_{mn}r', \varphi) r' dr' d\varphi}{[\mathcal{I}'_m(\pi\beta_{mn})]^2 + [I'_{mn}(\pi\beta_{mn})]^2}. \quad (\text{V.2.23})$$

Энергия колебаний пластины. Можно показать, что независимо от контура полная энергия колебаний пластины, определяемая формулой

$$W = \frac{M}{4} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_{mn}^2 \omega_{mn}^2, \quad (\text{V.2.24})$$

равна сумме энергий осцилляторов с частотами ω_{mn} , амплитудами $A_{mn} = \sqrt{B_{mn}^2 + C_{mn}^2}$ и массой, составляющей $1/4$ массы пластины.

ГЛАВА VI

РАСПРОСТРАНЕНИЕ УПРУГИХ ВОЛН В ЖИДКОСТЯХ И ГАЗАХ

§ VI.1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

В предыдущих главах были рассмотрены колебания ограниченных упругих тел с распределенными параметрами. На примере струны, закрепленной на концах, было показано, что смещение частиц струны, возникшее в начальный момент времени в каком-либо месте, распространяется вдоль струны в обоих противоположных направлениях в виде поперечных упругих волн, которые, многократно отражаясь от противоположных концов, в результате сложения образуют поперечные колебания с определенным набором частот, амплитуд и начальных фаз. В этой главе будут исследованы основные законы распространения упругих волн в пространстве, когда среду можно считать безграничной. Для начала в качестве упругой среды примем жидкости и газы.

В отличие от упругих твердых тел жидкости не способны сдерживать напряжения сдвига. В результате жидкости не имеют своей

формы, а принимают форму сосуда. Если к жидкости приложить напряжение сдвига, то слои жидкости начинают перемещаться, первоначальная форма поверхности будет изменяться до тех пор, пока действуют эти сдвиговые напряжения.

Количественно свойство сопротивления жидкости сдвиговым напряжениям характеризуют вязкостью η . Если вязкость равна нулю, то сдвиговые напряжения в жидкости не возникают. Если внутри невязкой жидкости провести поверхность S и выделить элемент поверхности ΔS с нормалью \mathbf{n} , а затем отнять от этого элемента ту часть жидкости, которая расположена со стороны положительного направления нормали, то, чтобы удержать оставшуюся часть жидкости,

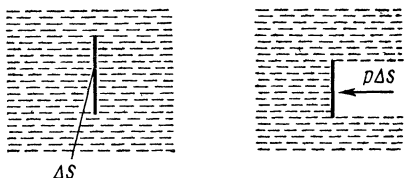


Рис. VI.1.1

следует приложить к элементу поверхности ΔS силу, равную $p\Delta S$ (рис. VI.1.1). Для невязких жидкостей, находящихся как в состоянии покоя, так и в состоянии движения, эта сила всегда перпендикулярна площадке ΔS . Физическую величину p , равную пределу отношения числового значения ΔF_n нормальной силы, действующей на участок поверхности площадью ΔS , к величине ΔS при $\Delta S \rightarrow 0$, стремящейся к нулю, называют давлением:

$$p = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta F_n}{\Delta S} = \frac{dF_n}{dS}.$$

В основу теории распространения упругих волн в жидкостях и газах положены уравнения состояния жидкости, уравнения движения Эйлера, уравнение непрерывности для плотности жидкости и уравнение, выражающее закон сохранения энергии, — всего шесть уравнений относительно давления p , плотности ρ , скорости \mathbf{v} и температуры T . Все перечисленные величины характеризуют свойства и состояние движения жидкости в том смысле, что они являются численными выражениями свойств элемента объема ΔV вещества, настолько малого по своим линейным размерам, что в пределах этого объема они не зависят от изменения координат точек пространства, ограниченного этим объемом.

Состояние движения жидкости определено полностью, если известны как функции времени и координат следующие физические величины: плотность ρ , давление p , компоненты скорости v_x, v_y, v_z и температура T . Для их нахождения необходимо иметь шесть независимых уравнений, содержащих эти функции и их производные. Остановимся на составлении этих уравнений.

Уравнение состояния выражает зависимость давления от плотности вещества и температуры. В общем виде оно может быть получено, если известен один из термодинамических потенциалов. Выберем в качестве независимых переменных плотность ρ или удельный объем $v = 1/\rho$ и температуру T . Тогда уравнение состояния выражают через свободную энергию единицы массы $f(v, T)$ в виде ее производной

по удельному объему при постоянной температуре:

$$p = - \left(\frac{\partial f}{\partial v} \right)_T.$$

Обычно функция $f(v, T)$ в явном виде неизвестна. Поэтому ее выражают с помощью разложения в степенной ряд по отклонениям независимых переменных от тех значений ρ_0 и T_0 , которые они имели в покоящейся жидкости:

$$\begin{aligned} f(v, T) = f(v_0 + v', T_0 + T') = f_0 + \left(\frac{\partial f}{\partial v} \right)_T^0 v' + \left(\frac{\partial f}{\partial T} \right)_v^0 T' + \\ + \frac{1}{2!} \left[\left(\frac{\partial f}{\partial v} \right)_T^0 v' + \left(\frac{\partial f}{\partial T} \right)_v^0 T' \right]^2 + \dots \approx f_0 + \left(\frac{\partial f}{\partial v} \right)_T^0 v' + \left(\frac{\partial f}{\partial T} \right)_v^0 T' + \\ + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \right)_T^0 v'^2 + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial T^2} \right)_v^0 T'^2 + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial v \partial T} \right)_v^0 v' T' + \dots \quad (\text{VI.1.1}) \end{aligned}$$

Воспользовавшись выражением (VI.1.1), получаем уравнение состояния в виде степенного ряда:

$$p = - \left(\frac{\partial f}{\partial v} \right)_T = p_0 + \frac{1}{\rho_0 \beta_T} \rho' + \frac{\alpha^{(v)}}{\beta_T} T' + \dots, \quad (\text{VI.1.2})$$

где $\alpha^{(v)}$ — коэффициент объемного расширения, β_T — изотермическая сжимаемость.

Для адиабатических процессов уравнение состояния удобно выразить в виде функции давления от объема и энтропии s единицы массы; $p = \left(\frac{\partial u}{\partial v} \right)_s$, где u — внутренняя энергия единицы массы. В этом случае для получения уравнения состояния в переменных s и v следует внутреннюю энергию $u(s, v)$ представить в виде степенного ряда

$$\begin{aligned} u(s, v) = u(v_0 + v', s_0 + s') = \\ = u_0 + \left(\frac{\partial u}{\partial v} \right)_s^0 v' + \left(\frac{\partial u}{\partial s} \right)_v^0 s' + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial v^2} \right)_s^0 v'^2 + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} \right)_v^0 s'^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial v \partial s} v' s' + \dots \end{aligned}$$

Тогда уравнение состояния будет иметь вид

$$p = - \left(\frac{\partial u}{\partial v} \right)_s = p_0 + \frac{1}{\rho_0 \beta_s} \rho' + \left(\frac{\partial p}{\partial s} \right)_v s' + \dots \quad (\text{VI.1.3})$$

Таким образом, в зависимости от характера процесса можно пользоваться как одной формой уравнения состояния, так и другой. Например, если процесс протекает при постоянной температуре, то удобно применять уравнение (VI.1.2). Если же во время процесса остается постоянной энтропия, то используют уравнение состояния в форме (VI.1.3).

Уравнение энергии запишем в форме первого закона термодинамики для обратимых процессов:

$$du = T ds - p dv.$$

В переменных v и T приращение внутренней энергии имеет вид

$$du = T ds - p dv = T \left[\left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_v dT + \left(\frac{\partial s}{\partial v} \right)_T dv \right] - p dv. \quad (\text{VI.1.4})$$

Согласно термодинамическим тождествам,

$$\left(\frac{\partial s}{\partial v}\right)_T \equiv \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v = p_0 \alpha^{(p)} = \frac{\alpha^{(v)}}{\beta_T}, \quad (\text{VI.1.5})$$

где $\alpha^{(p)}$ — термический коэффициент давления; $\left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_v = c_v/T_0$ (c_v — теплоемкость единицы массы при постоянном объеме).

Исходя из этого, получаем

$$du = c_v dT + \frac{\alpha^{(v)}}{\beta_T} dv - p dv. \quad (\text{VI.1.6})$$

Выразив dv через плотность $\left(dv = -\frac{1}{\rho_0^2} d\rho\right)$, получим

$$du = c_v dT - \frac{\alpha^{(v)}}{\rho_0^2 \beta_T} d\rho - p dv,$$

или $du - T ds + p dv = c_v dT - \frac{\alpha^{(v)}}{\beta_T \rho_0^2} d\rho - p dv + p dv - T ds = c_v dT - \frac{\alpha^{(v)}}{\beta_T \rho_0^2} d\rho - T ds = 0$,

$$c_v dT - \frac{\alpha^{(v)}}{\beta_T \rho_0^2} d\rho = T ds. \quad (\text{VI.1.7})$$

Для адиабатических процессов уравнения состояния и энергии имеют вид

$$p' = \frac{1}{\rho_0 \beta_s} \rho' + \dots, \quad c_v dT = \frac{\alpha^{(v)}}{\beta_T \rho_0^2} d\rho. \quad (\text{VI.1.8})$$

Для изотермических процессов имеют место иные уравнения, а именно:

$$p' = \frac{1}{\rho_0 \beta_T} \rho' + \dots, \quad T ds = -\frac{\alpha^{(v)}}{\beta_T \rho_0^2} d\rho. \quad (\text{VI.1.9})$$

Уравнение непрерывности является математической формулировкой закона сохранения массы вещества. Пусть некоторый объем пространства v ограничен поверхностью f (рис. VI.1.2), проницаемой для жидкости. Элемент объема Δv содержит массу жидкости $\Delta m = \rho \Delta v$. Масса жидкости, ограниченная поверхностью f , равна интегралу $m = \int_v \rho dv$. Изменение массы m жидкости в единицу времени

$$\frac{\partial m}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \int_v \rho dv = \int_v \frac{\partial \rho}{\partial t} dt. \quad (\text{VI.1.10})$$

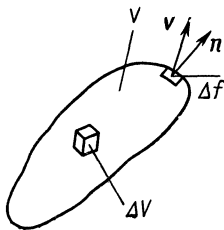


Рис. VI.1.2

Согласно закону неунитожимости массы, изменение массы в данном объеме должно компенсироваться массой жидкости, проникающей через поверхность. Обозначим элемент поверхности Δf , единичный вектор \mathbf{n} нормали к этому элементу, плотность жидкости ρ ,

скорость потока жидкости через элемент поверхности v . Количество жидкости, прошедшей через элемент площади Δf в единицу времени в направлении нормали \mathbf{n} , определяется формулой

$$\Delta \left(\frac{\partial m}{\partial t} \right) = \rho (\mathbf{v}\mathbf{n}) \Delta f.$$

Полный поток жидкости через поверхность f , охватывающую объем v , определяется интегралом по поверхности:

$$\frac{\partial m}{\partial t} = \oint_f \rho (\mathbf{v}\mathbf{n}) df. \quad (\text{VI.1.11})$$

Сумма изменения массы в единицу времени (VI.1.10) и полного потока массы через поверхность, ограничивающую данный объем (VI.1.11), по закону неуничтожаемости массы должна быть равна нулю:

$$\int_v \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \oint_f (\rho \mathbf{v}\mathbf{n}) df = 0. \quad (\text{VI.1.12})$$

Формула (VI.1.12) выражает закон сохранения массы в интегральной форме. Используя теорему Остроградского — Гаусса

$$\oint_f (\rho \mathbf{v}\mathbf{n}) df = \int_v (\nabla \rho \mathbf{v}) dV, \quad (\text{VI.1.13})$$

получаем уравнение непрерывности в дифференциальной форме:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\nabla \rho \mathbf{v}) = 0. \quad (\text{VI.1.14})$$

Обозначим оси прямоугольной системы координат цифрами 1, 2, 3 и представим уравнение (VI.1.14) в виде

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_1} (\rho v_1) + \frac{\partial}{\partial x_2} (\rho v_2) + \frac{\partial}{\partial x_3} (\rho v_3) = 0,$$

где $v_1 = v_x$, $v_2 = v_y$, $v_3 = v_z$ — компоненты скорости по осям координат.

Условимся, как это принято в тензорном исчислении, операцию суммирования $\sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \rho v_i$ записывать без знака суммирования, если индекс в первом и втором сомножителях повторяется. Так, например, обычная запись скалярного произведения векторов

$$(\mathbf{A}\mathbf{B}) = A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3 = \sum_{i=1}^3 A_i B_i$$

в сокращенной записи имеет вид $(\mathbf{A}\mathbf{B}) = A_i B_i$.

На основании этого формулы записи векторных уравнений в компонентах упрощаются. В частности, для уравнения непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho v_i) = 0, \quad (\text{VI.1.15})$$

Уравнения Эйлера. Выделим из пространства, занятого текущей жидкостью, объем V , ограниченный поверхностью f . Внешнее давление p на поверхность f по закону Паскаля направлено по внутренней нормали к поверхности. Сила давления dF на элемент поверхности df с единичным вектором нормали \mathbf{n} равна $dF = -pn df$.

Компонента силы по оси i ($i=1, 2, 3$ — номера координатных осей) $dF_i = -pn_i df$. Полная сила, действующая на все элементы поверхности в направлении координатной оси i , составляет $\oint_f pn_i df$.

На основании теоремы Остроградского — Гаусса этот интеграл преобразуется в объемный:

$$F_i = - \oint_f pn_i df = - \int_V \frac{\partial p}{\partial x_i} dV. \quad (\text{VI.1.16})$$

Величина, стоящая под знаком интеграла, представляет собой компоненту силы, действующей на жидкость, заключенную в элементе объема dV . Если ускорение частиц жидкости в пределах элемента объема dV есть dv_i/dt , то согласно закону динамики Ньютона

$$\frac{dv_i}{dt} = - \frac{(\partial p / \partial x_i) dV}{\rho dV} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i}.$$

Отсюда следуют дифференциальные уравнения движения

$$\frac{dv_i}{dt} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} = 0, \quad (\text{VI.1.17})$$

которые называют *уравнениями Эйлера*.

Здесь dv_i/dt — полное ускорение частицы движущейся жидкости, состоящее из мгновенного $\partial v_i / \partial t$ и переносного $v_k \partial v_i / \partial x_k$ ускорений:

$$\frac{dv_i}{dt} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k}.$$

Переносное ускорение записано с использованием правила повторяющихся индексов. В развернутом виде оно представляется суммой:

$$v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} = v_1 \frac{\partial v_i}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_i}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial v_i}{\partial x_3}.$$

С учетом выражения для полного ускорения уравнение (VI.1.17) принимает следующий вид:

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} = 0. \quad (\text{VI.1.18})$$

Последнее слагаемое уравнения Эйлера содержит произведение удельного объема $1/\rho$ на компоненту градиента давления. Его можно записать с помощью термодинамических соотношений (см. приложение IV) в виде

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} = v \frac{\partial p}{\partial x_i} = \frac{\partial h}{\partial x_i} - T \frac{\partial s}{\partial x_i},$$

где h и s — тепловая функция и энтропия единицы массы.

Используя указанную формулу, получаем

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial h}{\partial x_i} = T \frac{\partial s}{\partial x_i}. \quad (\text{VI.1.19})$$

Если энтропия вдоль всего пространства потока постоянна, то уравнение (VI.1.19) упрощается:

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial h}{\partial x_i} = 0. \quad (\text{VI.1.20})$$

Выражения (VI.1.3), (VI.1.7), (VI.1.14) и (VI.1.18) составляют полную систему уравнений гидродинамики идеальной жидкости. Эти уравнения сведены в табл. VI.1.1.

В общем виде все записанные уравнения нелинейные. Для их решения используют приближенные методы математической физики. Одним из них является метод возмущений, или метод последовательных приближений. Сущность этого метода состоит в следующем.

Искомые функции представляют в виде рядов Маклорена, составленных относительно малых отклонений параметров состояний от тех значений, которые имеет система, когда находится в полном покое. Значения этих параметров принимаются как решения уравнений в нулевом приближении. Для отыскания решения задачи в первом приближении подставляют в уравнения выражения искомых функций в виде разложений в степенные ряды, где отброшены члены, содержащие степени переменных выше первой. В результате получают линейные уравнения для определения малых отклонений искомых величин как функции от времени t и координат x, y, z .

Полученное решение первого приближения используют для отыскания функций во втором приближении. С этой целью к решениям первого приближения добавляют члены, содержащие вторую степень независимых переменных. После подстановки в нелинейное уравнение находят уравнение для определения добавочной функции. Эти уравнения также являются линейными. Их решение вместе с решениями нулевого и первого приближений дает решение задачи во втором приближении. Для нахождения более точного решения процесс повторяют с привлечением членов ряда, содержащего третьи степени, и т. д.

В акустике малых амплитуд ограничиваются только решениями первого порядка. Найдем уравнение первого порядка. Для этого каждую из искомых функций представим в виде ее значения для покоящейся жидкости и небольшого приращения, зависящего от малых изменений переменных относительно начальных значений. В этом случае в уравнениях состояния и энергии останутся только величины первого порядка. Что касается уравнения непрерывности, то, принимая условие, что произведение производных от скорости по координатам и малых приращений плотности — величины второго порядка малости, и отбрасывая их, получим линейное уравнение непрерывности относительно приращения плотности и малых значений v_i :

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0. \quad (\text{VI.1.21})$$

Уравнение состояния и уравнение энергии

Общие уравнения	Уравнения для адиабатических процессов	Уравнения для изотермических процессов
$p = - \left(\frac{\partial u}{\partial v} \right)_s, \quad p = - \left(\frac{\partial f}{\partial v} \right)_T$ $c_v dT - \frac{\alpha^{(v)}}{\beta_T \rho_0^2} d\rho = T ds$	$p = p_0 + \frac{1}{\rho_0 \beta_s} \rho'$ $c_v dT - \frac{\alpha^{(v)}}{\rho_0^2 \beta_T} = 0$	$p = p_0 + \frac{1}{\rho_0 \beta_T} \rho'$ $\frac{\alpha^{(v)}}{\rho_0^2 \beta_T} d\rho + T_0 ds = 0$

Уравнения непрерывности и уравнения Эйлера

В векторной форме	В символической форме теории поля	В компонентах
$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\nabla \rho \mathbf{v}) = 0$ $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} + \frac{1}{\rho} \nabla p = 0$	$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{v}) = 0$ $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \text{grad}) \mathbf{v} + \frac{1}{\rho} \text{grad} p = 0$	$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v_i)}{\partial x_i} = 0$ $\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} = 0$

В уравнениях Эйлера переносное ускорение $v_k \partial v_i / \partial x_k$ является также величиной второго порядка, если скорость v_i — малая величина первого порядка и членами $v_x \partial v_x / \partial x$; $v_y \partial v_x / \partial y$ можно пренебречь по сравнению с градиентом $\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i}$. Тогда уравнения Эйлера в линейном приближении будут иметь вид

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial x_i} = 0.$$

Эти уравнения также являются линейными относительно малых изменений давления p' и малых скоростей v_i .

В векторной форме уравнения гидродинамики линейного приближения имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{\rho_0 \beta_s} \rho, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 (\nabla \mathbf{v}) = 0, \\ c_V dT &= T_0 \frac{\alpha(V)}{\beta_T \rho_0^2} d\rho, \quad \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \nabla p = 0, \end{aligned} \quad (\text{VI.1.22})$$

где ρ , v , p , T — величины первого порядка; $\rho/\rho_0 \ll 1$; $v_i/c \ll 1$; $p/p_0 \ll 1$; $T/T_0 \ll 1$; ρ_0 , T_0 , p_0 — средние значения соответствующих величин; v — скорость распространения других волн.

Потенциал скорости. Система уравнений идеальной жидкости (см. табл. VI.1.1) составлена в геометрических переменных Эйлера относительно скалярных (ρ , p , T) полей и векторного поля \mathbf{v} . В общем виде векторное поле представляет собой наложение потенциального и соленоидального полей: $\mathbf{v} = \mathbf{v}_n + \mathbf{v}_c$.

Для потенциального поля $\text{rot } \mathbf{v}_n = 0$, т. е. линии этого поля незамкнуты. Соленоидальное же поле — вихревое, его линии замыкаются сами на себя, следовательно, дивергенция скорости v_c равна нулю ($\text{div } \mathbf{v}_c = 0$).

Покажем, что векторное поле скорости, входящее в акустические уравнения (VI.1.21) и (VI.1.22), состоит только из потенциального поля. С этой целью представим уравнение Эйлера в виде интеграла по времени:

$$\mathbf{v} = - \frac{1}{\rho_0} \int_{t_0}^{t+t_0} \nabla p \, d\tau = - \nabla \int_{t_0}^{t+t_0} \frac{1}{\rho_0} p \, d\tau. \quad (\text{VI.1.23})$$

Проведем доказательство от противного. Предположим, что поле вектора скорости (VI.1.23) состоит из потенциального и соленоидального полей ($\mathbf{v} = \mathbf{v}_n + \mathbf{v}_c$). Применим к этому полю дифференциальную операцию rot :

$$\text{rot } \mathbf{v} = \text{rot } \mathbf{v}_n + \text{rot } \mathbf{v}_c. \quad (\text{VI.1.24})$$

Из теории поля известно, что дифференциальная операция rot над $\text{grad } \phi$ равна нулю. Таким образом, в левой части (VI.1.24) имеем нуль, а в правой $\text{rot } \mathbf{v}_n + \text{rot } \mathbf{v}_c$. Но, по определению, $\text{rot } \mathbf{v}_n = 0$, откуда следует, что $\text{rot } \mathbf{v}_c = 0$. Следовательно, $\mathbf{v}_c = \text{const}$. Однако для бесконечно удаленных точек пространства $\mathbf{v}_c = 0$. Поэтому это поле равно нулю и для произвольной точки пространства.

Отсюда следует, что векторное поле \mathbf{v} , удовлетворяющее линейному уравнению (VI.1.23), имеет потенциальный характер. Интеграл, входящий в выражение (VI.1.23), называют *потенциалом скорости*:

$$\Phi(x, y, z, t) = \frac{1}{\rho_0} \int_0^t p d\tau. \quad (\text{VI.1.25})$$

Используя определение потенциала скорости (VI.1.25) и уравнения линейного приближения (VI.1.22), можно показать, что все функции ρ , p , v_i , T связаны с потенциалом скорости простыми соотношениями:

$$\begin{aligned} p(x_k t) &= \rho_0 \frac{\partial \Phi(x_k t)}{\partial t}, \quad \rho(x_k t) = \rho_0^2 \beta_s \frac{\partial \Phi(x_k t)}{\partial t}, \quad v_i(x_k t) = -\frac{\partial}{\partial x_i} \Phi(x_k t), \\ T(x_k, t) &= \frac{T_0 \alpha^V}{c_p} \frac{\partial \Phi(x_k, t)}{\partial t}. \end{aligned} \quad (\text{VI.1.26})$$

$(x_k = x, y, z)$

Согласно этим формулам, все функции, характеризующие малые изменения указанных величин, получаются из одной скалярной функции путем ее дифференцирования.

Иногда полезно вместо шести уравнений для шести функций иметь одно дифференциальное уравнение относительно какой-либо из них (часто в ее качестве используют потенциал скорости). Полученное дифференциальное уравнение относительно потенциала скорости будет содержать производные второго порядка по времени и координатам и называется *волновым уравнением для потенциала скорости*. Очевидно, что в зависимости от выбора функции, к которой сводят указанную систему, волновых уравнений будет несколько. Рассмотрим одно из них.

§ VI.2. ВОЛНОВОЕ УРАВНЕНИЕ И ЕГО РЕШЕНИЕ

Подставим в уравнения (VI.1.22) выражения искомых функций через потенциал скорости (VI.1.25) и после необходимых преобразований получим вместо шести уравнений первого порядка для p , ρ , v_x , v_y , v_z , T — одно дифференциальное уравнение второго порядка относительно $\Phi(x_i, t)$:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - \frac{1}{\rho_0 \beta_s} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i^2} = 0. \quad (\text{VI.2.1})$$

Плоские волны. Когда потенциал скорости — функция одной координаты x и времени t , то уравнение (VI.2.1) совпадает с волновым уравнением струны:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - \frac{1}{\rho_0 \beta_s} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = 0. \quad (\text{VI.2.2})$$