Отсюда следует, что векторное поле $\mathbf{v}$, удовлетворяющее линейному уравнению (VI.1.23), имеет потенциальный характер. Интеграл, входящий в выражение (VI.1.23), называют *потенциалом скорости:*

$$\Phi(x, y, z, t) = \frac{1}{\rho_0} \int_0^t p\,d\tau. \tag{VI.1.25}$$

Используя определение потенциала скорости (VI.1.25) и уравнения линейного приближения (VI.1.22), можно показать, что все функции ρ, p, v_i, T связаны с потенциалом скорости простыми соотношениями:

$$p(x_k t) = \rho_0 \frac{\partial \Phi(x_k t)}{\partial t}, \quad \rho(x_k t) = \rho_0^2 \beta_s \frac{\partial \Phi(x_k t)}{\partial t}, \quad v_i(x_k t) = -\frac{\partial}{\partial x_i} \Phi(x_k t),$$

$$T(x_k, t) = \frac{T_0 \alpha^V}{c_p} \frac{\partial \Phi(x_k, t)}{\partial t}. \tag{VI.1.26}$$

$$(x_k = x, y, z)$$

Согласно этим формулам, все функции, характеризующие малые изменения указанных величин, получаются из одной скалярной функции путем ее дифференцирования.

Иногда полезно вместо шести уравнений для шести функций иметь одно дифференциальное уравнение относительно какой-либо из них (часто в ее качестве используют потенциал скорости). Полученное дифференциальное уравнение относительно потенциала скорости будет содержать производные второго порядка по времени и координатам и называется *волновым уравнением для потенциала скорости.* Очевидно, что в зависимости от выбора функции, к которой сводят указанную систему, волновых уравнений будет несколько. Рассмотрим одно из них.

§ VI.2. ВОЛНОВОЕ УРАВНЕНИЕ И ЕГО РЕШЕНИЕ

Подставим в уравнения (VI.1.22) выражения искомых функций через потенциал скорости (VI.1.25) и после необходимых преобразований получим вместо шести уравнений первого порядка для p, ρ, v_x, v_y, v_z, T — одно дифференциальное уравнение второго порядка относительно $\Phi(x_i, t)$:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - \frac{1}{\rho_0 \beta_s} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i^2} = 0. \tag{VI.2.1}$$

Плоские волны. Когда потенциал скорости — функция одной координаты x и времени t, то уравнение (VI.2.1) совпадает с волновым уравнением струны:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - \frac{1}{\rho_0 \beta_s} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = 0. \tag{VI.2.2}$$

Частным решением уравнения (VI.2.2) (см. гл. III) является функция

$$\Phi(x,\ t)=f(t-x/c), \qquad \text{(VI.2.3)}$$

где $c=\sqrt{1/(\rho_0\beta_s)}$.

Существенная особенность данного решения состоит в том, что здесь время t и координата x определяют численные значения функции не раздельно, а в линейном сочетании: $\eta=t-x/c$. Каждому значению η соответствует одно и только одно значение потенциала скорости. Величину, которая однозначно определяет отклонение функции от среднего значения, называют *фазой*, а геометрическое место точек равной фазы — *фронтом волны*.

В зависимости от формы поверхности равной фазы волны разделяют на плоские, цилиндрические, сферические и др.

Пусть $\eta=t_0$. Тогда для момента времени t получим уравнение фронта волны

$$x=c(t-t_0), \qquad \text{(VI.2.4)}$$

которое представляет собой уравнение плоскости, параллельной YOZ и отстоящей от начала прямоугольной системы координат на расстоянии $c(t-t_0)$. Для текущего времени t фронт волны перемещается вдоль оси X со скоростью c.

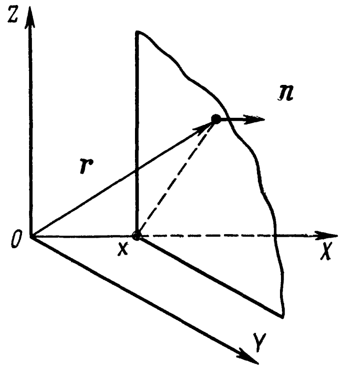

Рис. VI.2.1

Для записи уравнения фронта волны в форме, не зависимой от системы координат, используют векторные уравнения поверхностей. В частности, для плоской волны — уравнение плоскости в векторной форме. Пусть конец радиуса вектора **r** соответствует произвольной точке плоского фронта волны, распространяющейся вдоль оси OX (рис. VI.2.1). Обозначим **n** единичную нормаль плоского фронта в направлении распространения. Тогда расстояние x от начала O до фронта волны в момент времени t определится проекцией вектора **r** на направление нормали **n**, т. е. скалярным произведением векторов **r** и **n**. Следовательно, уравнение фазовой плоскости примет вид $(\mathbf{rn})=c(t-t_0)$, а фаза волны получит выражение, не зависимое от системы координат:

$$\eta=t-\frac{\mathbf{rn}}{c}. \qquad \text{(VI.2.5)}$$

Пользуясь этой записью фазы, нетрудно получить формулу плоской волны, распространяющейся в любом направлении относительно выбранной прямоугольной системы координат. Для этого достаточно записать скалярное произведение $(\mathbf{rn})$ в компонентах относительно системы XYZ. Следовательно, $(\mathbf{rn})$ есть расстояние от начала координат до плоского фронта волны.

Цилиндрические волны. Для описания таких волн удобно пользоваться цилиндрической системой координат. Предположим, что потенциал скорости Φ не зависит от координаты z и является функцией полярного вектора r, угла φ и времени t. Тогда волновое уравнение будет совпадать с волновым уравнением мембраны [см. (V.1.6)]:

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} - c^2\left[\frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial\Phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}\right] = 0, \qquad \text{(VI.2.6)}$$

$$c^2 = \frac{1}{\rho_0\beta_s}.$$

Для частного случая, когда потенциал не зависит от угла φ, уравнение (VI.2.6) принимает вид

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} - c^2\left[\frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)\right] = 0. \qquad \text{(VI.2.7)}$$

Для получения решения уравнения (VI.2.7) преобразуем его к функции $U = \sqrt{r}\,\Phi$ и найдем

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} = 0.$$

Одно из частных решений этого уравнения имеет вид

$$U(r,\ t) = f(t - r/c).$$

Отсюда следует выражение для функции $\Phi(r,\ t)$:

$$\Phi(r,\ t) = \frac{1}{\sqrt{r}} f(t - r/c). \qquad \text{(VI.2.8)}$$

Поверхность равной фазы в этом случае удовлетворяет уравнению $\eta_0 = t - r/c$, или $r = c(t - \eta_0)$, и представляет собой цилиндрическую поверхность с круговым сечением, ось которой совпадает с осью Z (рис. VI.2.2), а радиус r растет пропорционально времени.

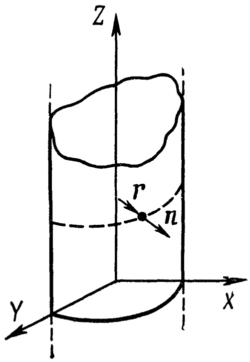

Рис. VI.2.2

В отличие от плоской волны функция Φ в данном случае обратно пропорциональна корню квадратному из расстояния r.

Сферические волны. Если потенциал скорости является функцией трех координат и времени, то волновое уравнение имеет вид

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} - c^2\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}\right) = 0, \qquad \text{(VI.2.9)}$$

или в сферической системе координат

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} - c^2\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}\right] = 0. \qquad \text{(VI.2.10)}$$

В частности, когда функция не зависит от угловых координат,

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} - c^2\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)\right] = 0. \qquad \text{(VI.2.11)}$$

Нетрудно показать, что после замены функции $\Phi(r,\ t)$ выражением $U(r,\ t)/r$ из (VI.2.11) получается уравнение

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \frac{1}{\rho_0\beta_s}\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} = 0.$$

Его частное решение:

$$U = f(t - r/c), \quad \Phi(r, t) = \frac{1}{r} f(t - r/c), \tag{VI.2.12}$$

где $c = \sqrt{\frac{1}{\rho\beta_s}}$, $\eta_0 = t - \frac{r}{c}$ — фаза.

Тогда уравнение для волнового фронта

$$r = c(t - \eta_0). \tag{VI.2.13}$$

Это уравнение сферической поверхности, радиус которой увеличивается пропорционально времени t. Таким образом, потенциал Φ представляет собой сферическую волну, распространяющуюся со скоростью $c = \sqrt{1/(\rho\beta_s)}$. Значение потенциала уменьшается обратно пропорционально расстоянию r.

Любую периодическую волну можно представить в виде совокупности синусоидальных волн с помощью рядов Фурье.

Разложение волновой функции в ряд Фурье. Если волновая функция плоских волн $\Phi = f(\eta) = f(t - x/c)$ имеет период T и $f(\eta) = f(\eta + T)$, то ее можно разложить в ряд по гармоническим функциям:

$$\Phi(x, t) = f(\eta) = \frac{A_n}{2} + \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} A_m \cos\frac{2m\pi\eta}{T} + B_m \sin\frac{2m\pi\eta}{T} \right\}, \tag{VI.2.14}$$

где $A_0 = \frac{2}{T}\int_0^T f(\eta)\,d\eta$; $A_m = \frac{2}{T}\int_0^T f(\eta)\cos\frac{2m\pi\eta}{T}\,d\eta$;

$$B_m = \frac{2}{T}\int_0^T f'(\eta)\sin\frac{2m\pi\eta}{T}\,d\eta; \quad \eta = t - \frac{x}{c}.$$

Обозначив периоды гармонических составляющих разложения (VI.2.14) $T/m = T_m$, получим для гармонической составляющей периодического волнового процесса выражение

$$A_m \cos\frac{2\pi}{T_m}\left(t - \frac{x}{c}\right) = A_m \cos(\omega_m t - k_m x),$$

где $\omega_m = \frac{2\pi}{T_m}$; $k_m = \frac{2\pi}{cT_m} = \frac{2\pi}{\lambda_m}$; λ_m — длина волны, соответствующая гармонической составляющей периодического волнового процесса.

Часто ряд Фурье записывают в следующем виде:

$$\Phi(x, t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a\cos(\omega_m\eta - \alpha_m) =$$

$$= \frac{A_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} (A_m \cos\omega_m\eta + B_m \sin\omega_m\eta), \tag{VI.2.15}$$

где $a_m = \sqrt{A_m^2 + B_m^2}$; $A_m = \frac{2}{T}\int_0^T f(\eta)\cos\frac{2m\eta}{T}\,d\eta$;

$$B_m = \frac{1}{m\pi}\int_0^T f'(\eta)\sin\frac{2m\eta}{T}\,d\eta; \quad \operatorname{tg}\alpha_m = \frac{B_m}{A_m}.$$

При анализе волновых процессов иногда удобно использовать представление гармонической функции с помощью комплексной функции действительного аргумента:

$$a_m \cos(\omega_m t - k_m x - \varphi_m) = \operatorname{Re} \tilde{a}_m e^{j(\omega_m t - k_m x)}, \qquad \text{(VI.2.16)}$$

где $\tilde{a}_m = a_m e^{-j\varphi_m}$, $x = (\mathbf{nr})$.

При этом все линейные операции с тригонометрическими функциями заменяют на те же операции с функциями комплексными, как это принято в теории колебаний.

Гармонические волны являются наиболее простым частным случаем периодических волн. Для плоских гармонических волн, распространяющихся в сторону положительного направления координатной оси X. потенциал скорости может быть записан комплексной функцией $\Phi = Ae^{j(\omega t - kx)}$.

Воспользуемся формулами для функций волнового поля (VI.1.16) и получим:

$$\rho = \rho_0 c^2 j\omega\Phi, \quad T = \frac{T_0 \alpha^{(V)}}{c_p} j\omega\Phi,$$

$$v_x = \dot{\xi} = -\frac{\partial\Phi}{\partial x} = jk\Phi, \quad p = \rho_0 \frac{\partial\Phi}{\partial t} = j\omega\Phi,$$

$$\xi = \frac{1}{c}\Phi. \qquad \text{(VI.2.17)}$$

Отношение давления p к колебательной скорости v_x называют *удельным волновым сопротивлением*. Для плоской волны эта величина выражается формулой

$$z_0 = \frac{p}{\dot{\xi}} = \rho_0 c.$$

Отсюда получают следующий вывод: *в плоской звуковой волне избыточное давление и колебательная скорость совпадают по фазе, но опережают фазу смещения частиц на* 90°. Это значит, что в тот момент времени, когда в данном месте жидкости наступит максимальное избыточное давление, частицы среды имеют наибольшую скорость, причем направление скорости совпадает с направлением распространения звука. Смещения частиц в этом месте равны нулю, т. е. частицы среды в местах наибольшего давления проходят через положение равновесия в направлении распространения волны с максимальной скоростью.

В тот момент времени, когда в каком-либо месте среды волна вызовет наибольшее уменьшение давления, частицы среды будут проходить положение равновесия с максимальной колебательной скоростью, но только в направлении, противоположном направлению распространения звука.

Что касается цилиндрической волны, то для нее потенциал скорости имеет вид

$$\Phi = \frac{A_0}{\sqrt{r}} e^{j(\omega t - kr)}.$$

Соответственно этому ее колебательная скорость

$$v_r = -\frac{\partial \Phi}{\partial r} = \left(jk - \frac{1}{2r}\right)\Phi = \frac{A_0}{\sqrt{r}}\left(jk - \frac{1}{2r}\right)e^{j(\omega t - kr)},$$

давление

$$p = j\omega\rho_0\Phi.$$

Удельное волновое сопротивление для цилиндрической волны является комплексной функцией расстояния и волнового числа:

$$z_ц = \frac{p}{v_r} = \frac{\rho_0 c}{1 + j/(2kr)} = \frac{\rho_0 c}{\sqrt{1 + [1/(2kr)^2]}}\, e^{-j \operatorname{arctg}\frac{1}{2kr}}.$$

При $kr \to \infty$ сдвиг фаз между давлением и скоростью стремится к нулю $\left(\frac{1}{kr} \to 0\right)$, поэтому $z_ц \to \rho_0 c$ и цилиндрическую волну на больших расстояниях можно считать плоской.

Для сферической волны $\left(\Phi = \frac{A_0}{r}\, e^{j(\omega t - kr)}\right)$ также не имеет места совпадение фаз давления p и колебательной скорости v_r:

$$p = j\omega\rho\Phi = \frac{\omega_0\rho_0 A_0}{r}\, e^{j(\omega t - kr + \pi/2)}, \qquad \text{(VI.2.18)}$$

$$v_r = -\frac{\partial}{\partial r}\Phi = jk\left(1 + \frac{1}{jkr}\right)\Phi = k^2\left(1 + \frac{1}{k^2 r^2}\right)e^{j(\omega t - kr + \pi/2 - \alpha)}, \qquad \text{(VI.2.19)}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = -1/(kr).$$

Тогда удельное волновое сопротивление для сферической волны выражают комплексной функцией

$$z_r = \frac{p}{v_r} = \frac{\rho_0 c}{1 + 1/(k^2 r^2)}\left(1 + j\,\frac{1}{kr}\right),$$

модуль которой $\frac{\rho_0 c}{\sqrt{1 + 1/(k^2 r^2)}}$, а фаза $\operatorname{arctg}\frac{1}{kr}$. Это значит, что в сферической волне колебательная скорость отстает по фазе от давления на угол, тангенс которого $1/(kr)$. При увеличении $kr \to \infty$ сдвиг фаз между колебательной скоростью и давлением стремится к нулю. В этом случае сферическая волна может быть приближенно принята за плоскую. Увеличение произведения kr можно провести при удалении от источника или увеличении волнового числа, т. е. при переходе к высоким частотам. Так как $kr = 2\pi r/\lambda$ является величиной относительной, то мерой удаления от источника может быть отношение r/λ. Сферическая волна приобретает свойство плоской при большом отношении r/λ.

§ VI.3. ЭНЕРГИЯ УПРУГИХ ВОЛН

Поток энергии. Найдем скорость изменения полной энергии потока жидкости в замкнутом объеме при нестационарном процессе:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_V \rho\left(u + \frac{v^2}{2}\right)dV = \int\limits_V \frac{\partial}{\partial t}\left(\rho u + \frac{\rho v^2}{2}\right)dV.$$