Соответственно этому ее колебательная скорость

$$v_r = -\frac{\partial\Phi}{\partial r} = \left(jk - \frac{1}{2r}\right)\Phi = \frac{A_0}{\sqrt{r}}\left(jk - \frac{1}{2r}\right)e^{j(\omega t - kr)},$$

давление

$$p = j\omega\rho_0\Phi.$$

Удельное волновое сопротивление для цилиндрической волны является комплексной функцией расстояния и волнового числа:

$$z_{ц} = \frac{p}{v_r} = \frac{\rho_0 c}{1 + j/(2kr)} = \frac{\rho_0 c}{\sqrt{1 + [1/(2kr)^2]}}\, e^{-j \operatorname{arctg}\frac{1}{2kr}}.$$

При $kr \to \infty$ сдвиг фаз между давлением и скоростью стремится к нулю $\left(\frac{1}{kr} \to 0\right)$, поэтому $z_{ц} \to \rho_0 c$ и цилиндрическую волну на больших расстояниях можно считать плоской.

Для сферической волны $\left(\Phi = \frac{A_0}{r}\, e^{j(\omega t - kr)}\right)$ также не имеет места совпадение фаз давления p и колебательной скорости v_r:

$$p = j\omega\rho\Phi = \frac{\omega_0\rho_0 A_0}{r}\, e^{j(\omega t - kr + \pi/2)}, \qquad \text{(VI.2.18)}$$

$$v_r = -\frac{\partial}{\partial r}\Phi = jk\left(1 + \frac{1}{jkr}\right)\Phi = k^2\left(1 + \frac{1}{k^2 r^2}\right)e^{j(\omega t - kr + \pi/2 - \alpha)}, \qquad \text{(VI.2.19)}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = -1/(kr).$$

Тогда удельное волновое сопротивление для сферической волны выражают комплексной функцией

$$z_r = \frac{p}{v_r} = \frac{\rho_0 c}{1 + 1/(k^2 r^2)}\left(1 + j\frac{1}{kr}\right),$$

модуль которой $\frac{\rho_0 c}{\sqrt{1 + 1/(k^2 r^2)}}$, а фаза $\operatorname{arctg}\frac{1}{kr}$. Это значит, что в сферической волне колебательная скорость отстает по фазе от давления на угол, тангенс которого $1/(kr)$. При увеличении $kr \to \infty$ сдвиг фаз между колебательной скоростью и давлением стремится к нулю. В этом случае сферическая волна может быть приближенно принята за плоскую. Увеличение произведения kr можно провести при удалении от источника или увеличении волнового числа, т. е. при переходе к высоким частотам. Так как $kr = 2\pi r/\lambda$ является величиной относительной, то мерой удаления от источника может быть отношение r/λ. Сферическая волна приобретает свойство плоской при большом отношении r/λ.

§ VI.3. ЭНЕРГИЯ УПРУГИХ ВОЛН

Поток энергии. Найдем скорость изменения полной энергии потока жидкости в замкнутом объеме при нестационарном процессе:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho\left(u + \frac{v^2}{2}\right)dV = \int_V \frac{\partial}{\partial t}\left(\rho u + \frac{\rho v^2}{2}\right)dV.$$

С этой целью преобразуем производную, стоящую под знаком интеграла, используя уравнение гидродинамики и уравнение энергии для адиабатического процесса:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho v_i),\quad \frac{\partial v_i}{\partial t}=-v_k\frac{\partial v_i}{\partial x_k}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i},$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=T\frac{\partial s}{\partial t}+\frac{p}{\rho^2}\frac{\partial\rho}{\partial t},\quad dh=T\,dS+\frac{1}{\rho}\,dp. \qquad \text{(VI.3.1)}$$

Заметим, что $h=u+\frac{1}{\rho}\,p$, $v_iv_k\frac{\partial v_i}{\partial x_k}=v_kv_i\frac{\partial v_i}{\partial x_k}=v_k\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{v^2}{2}\right)=v_i\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{v^2}{2}\right)$. Тогда

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho\left(u+\frac{v^2}{2}\right)\right]=\frac{\partial\rho}{\partial t}\left(u+\frac{v^2}{2}\right)+\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+v_i\frac{\partial v_i}{\partial t}\right)=$$

$$=-\frac{\partial}{\partial x_i}\left[(\rho v_i)\left(u+\frac{v^2}{2}\right)\right]-\rho T\frac{\partial s}{\partial t}-\frac{p}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho v_i)-\rho v_i\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{v^2}{2}\right)+\frac{\partial p}{\partial x_i}=$$

$$=\rho T\frac{\partial s}{\partial t}-\left(\frac{v^2}{2}+h\right)\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho v_i)-\rho v_i\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{v^2}{2}+h\right)-\rho Tv_i\frac{\partial s}{\partial x_i}-\rho T\frac{\partial s}{\partial t}=$$

$$=-\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\rho v_i\left(\frac{v^2}{2}+h\right)\right]-T\rho\left(\frac{\partial s}{\partial t}+v_i\frac{\partial s}{\partial x_i}\right).$$

Для потока с постоянной энтропией $\left(\frac{\partial s}{\partial t}+v_i\frac{\partial s}{\partial x_i}=0\right)$ получим

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho v^2}{2}+\rho u\right)=-\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\rho v_i\left(\frac{v^2}{2}+h\right)\right].$$

Отсюда следует

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_V\left(\frac{\rho v^2}{2}+\rho u\right)dV=-\int\limits_V\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\rho v_i\left(\frac{v^2}{2}+h\right)\right]dV.$$

Используя теорему Остроградского — Гаусса, находим

$$\int\limits_V\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\rho v_i\left(\frac{v^2}{2}+\rho u\right)\right]dV=\oint\limits_f\left[\rho v_i\left(\frac{v^2}{2}+h\right)n_i\,df.\right. \qquad \text{(VI.3.2)}$$

Следовательно,

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_V\left(\frac{\rho v^2}{2}+\rho u\right)dV=-\oint\left(\frac{\rho v^2}{2}+\rho h\right)v_in_i df. \qquad \text{(VI.3.3)}$$

Из формулы (VI.3.3) видно, что *изменение в единицу времени полной энергии текущей жидкости в объеме V равно полному потоку мощности через поверхность, замыкающую объем.*

Энергию, протекающую в направлении нормали к элементу поверхности df в единицу времени, называют *потоком мощности* через площадку df:

$$dI=\left(\frac{\rho v^2}{2}+\rho h\right)(\mathbf{vn})\,df. \qquad \text{(VI.3.4)}$$

Отношение потока dI к элементу площади $df\cos(\mathbf{nv})$ называют *плотностью потока энергии* или *вектором Умова — Пойнтинга*:

$$Y=\left(\frac{\rho v^2}{2}+\rho h\right)\mathbf{v}=\left(\frac{\rho v^2}{2}+\rho u+p\right)\mathbf{v}. \qquad \text{(VI.3.5)}$$

Этот вектор совпадает по направлению с вектором скорости течения жидкости.

Интенсивность упругих волн. Найдем выражение вектора Умова — Пойнтинга для случая упругих волн. Пусть плотность ρ и тепловая функция единицы массы h отклоняются от своих средних значений на ρ' и h'. При этом ρ'/ρ_0 и h'/h_0 — малые величины первого порядка. Допустим, что скорость $\mathbf{v}$ удовлетворяет условию $|v|/c \ll 1$. Кроме того, предположим, что процесс распространения упругой волны подчиняется закону постоянства энтропии ($ds=0$). Подставим в выражение (VI.3.5) значение функции, соответствующей линейному приближению:

$$\rho = \rho_0 + \rho' \approx \rho_0,$$
$$h = h_0 + dh = h_0 + T\,ds + v\,dp = h_0 + T\,ds + \frac{1}{\rho}\,dp.$$

Заменяя дифференциал давления на конечное приращение и учитывая, что, по условию, $ds=0$, найдем для тепловой функции единицы массы выражение

$$h = h_0 + \frac{1}{\rho_0}\,p'.$$

После подстановки в формулу (VI.3.5) этих выражений получим

$$Y_i = \left(\frac{\rho_0 v^2}{2} + \rho_0 h_0 + p'\right) v_i, \tag{VI.3.6}$$

или в векторных обозначениях

$$Y = \left(\frac{\rho_0 v^2}{2} + \rho_0 h_0 + p'\right) \mathbf{v}. \tag{VI.3.7}$$

Интенсивностью упругой волны называют среднюю по времени вектора плотности потока энергии (VI.3.7).

Допустим, что волновой процесс определен частотой ω и скоростью c распространения волны и что между колебаниями давления p и скоростью v имеется сдвиг фаз α. Пусть эта гармоническая волна плоская и распространяется в направлении оси X. Тогда колебательная скорость направлена по оси X и выражается формулой

$$v_x = v_0 \cos(\omega t - kx).$$

В данном случае вектор потока энергии имеет только компоненту на оси X и выражается нелинейной функцией общей фазы $\eta = \omega t - kx$:

$$\begin{aligned} Y = \left[\frac{\rho_0}{2} v_0^2 \cos^2(\omega t - kx) + \rho_0 h_0 + p_0 \cos(\omega t - kx - \alpha)\right] v_0 \cos(\omega t - kx) = \\ = \frac{\rho_0}{2} v_0^3 \cos^3(\omega t - kx) + \rho_0 h_0 v_0 \cos(\omega t - kx) + \\ + p_0 v_0 \cos(\omega t - kx - \alpha)\cos(\omega t - kx). \end{aligned} \tag{VI.3.8}$$

Для получения общей формулы интенсивности гармонической волны с частотой $\omega = 2\pi/T$ усреднение вектора $\mathbf{Y}$ надо проводить по времени t, кратному периоду T.

С этой целью необходимо вычислить интеграл по времени от выражения плотности потока энергии (VI.3.8) в пределах от 0 до lT и результат разделить на lT (l — целое число):

$$\mathcal{I} = \frac{1}{lT} \int_0^{lT} Y\,dt = \frac{1}{T}(I_1 + I_2 + I_3), \qquad \text{(VI.3.9)}$$

где

$$I_1 = \frac{\rho_0}{2} v_0^3 \int_0^{lT} \cos^3\left(\frac{2\pi}{T} t - kx\right) dt;$$

$$I_2 = \rho_0 h_0 v_0 \int_0^{lT} \cos\left(\frac{2\pi}{T} t - kx\right) dt;$$

$$I_3 = p_0 v_0 \int_0^{lT} \cos\left(\frac{2\pi}{T} t - kx - \alpha\right) \cos\left(\frac{2\pi}{T} t - kx\right) dt,$$

причем I_1 и I_2, как интегралы от нечетных функций, равны 0, а интеграл I_3 имеет четную функцию и равен

$$I_3 = \frac{p_0 v_0}{2} lT \cos\alpha. \qquad \text{(VI.3.10)}$$

В результате интенсивность гармонической бегущей волны

$$\mathcal{I} = \frac{p_0 v_0}{2} \cos\alpha. \qquad \text{(VI.3.11)}$$

В частности, для плоских волн, распространяющихся без затухания, $\alpha = 0$ и $\mathcal{I} = p_0 v_0/2$.

Если воспользоваться связью между давлением p_0 и колебательной скоростью v_0 для плоской волны $v_0 = p_0/(\rho_0 c)$, то

$$\mathcal{I} = \frac{p_0^2}{2\rho_0 c} = \frac{\rho_0 v_0^2}{2} c. \qquad \text{(VI.3.12)}$$

Для цилиндрической волны получаем следующую формулу при расчете интенсивности:

$$\mathcal{I} = \frac{p_0 v_0}{2} \cos\alpha = \frac{4\pi^2 A_0^2}{2\lambda^2 r} \rho_0 c. \qquad \text{(VI.3.13)}$$

Аналогично можно получить формулу для интенсивности сферической волны:

$$\mathcal{I} = \frac{4\pi^2 A_0^2}{2\lambda^2 r^2} \rho_0 c. \qquad \text{(VI.3.14)}$$

Заметим, что согласно этим формулам интенсивность цилиндрической волны убывает обратно пропорционально расстоянию, а интенсивность сферической обратно пропорциональна квадрату расстояния.

Интенсивность стоячей волны можно получить как частный случай (VI.3.11). В стоячей волне между давлением и колебательной скоростью сдвиг фаз $\pi/2$, откуда следует, что ее интенсивность равна нулю.

Если давление и колебательная скорость волны выражаются комплексными функциями действительного аргумента, то для вычисления интенсивности (см. гл. I) достаточно взять реальную часть половины произведения взаимосопряженных комплексных функций скорости и давления. Например, для цилиндрической волны комплексные выражения скорости и давления имеют вид:

$$\tilde{v} = \frac{A_0}{\sqrt{r}}\, jk\left(1 - j\,\frac{1}{2kr}\right) e^{j(\omega t - kr)}, \qquad p = \frac{A_0}{\sqrt{r}}\, j\omega\rho_0 e^{j(\omega t - kr)}.$$

При замене j на $-j$ образуем комплексно-сопряженное выражение для функции давления. Половина произведения $\tilde{v}\tilde{p}^*$ имеет вид комплексной функции $\frac{1}{2}\frac{A_0^2}{r}\, k\omega\rho_0\left(1 - j\,\frac{1}{2kr}\right)$. Отсюда интенсивность равна

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left[\frac{A_0^2}{r}\, k\omega\rho_0\left(1 - j\,\frac{1}{2kr}\right)\right] = \frac{1}{2}\,\frac{A_0^2}{r}\, k\omega\rho_0 = \frac{2\pi^2 A_0^2}{\lambda^2 r}\,\rho_0 c.$$

Если бегущая волна периодическая и состоит из нескольких гармонических составляющих, то для вычисления интенсивности необходимо просуммировать интенсивности всех гармонических составляющих. Иногда интенсивность периодической, но не синусоидальной, волны определяют как среднюю по времени, кратному периоду, плотность потока энергии.

Для стационарной статистической зависимости звукового поля от времени усреднение проводят за промежуток времени, больший по сравнению со временем, соответствующим радиусу корреляции волны.

Интенсивность упругих волн является одной из энергетических характеристик звукового поля. Преимущественно ее используют для поля бегущих волн.

Плотность звуковой энергии. Другой энергетической характеристикой упругих волн является энергия волны, приходящаяся на единицу объема и усредненная по времени. Для вычисления этой величины найдем энергию волны в элементе объема:

$$\left\{\left[\rho\left(\frac{v^2}{2} + u\right)\right] - \rho_0 u_0\right\}\Delta V = \left\{\left[(\rho_0 + \rho')\left(\frac{v^2}{2} + u_0 + u'\right)\right] - \rho_0 u_0\right\}\Delta V =$$

$$= \left(\frac{\rho_0 v^2}{2} + \rho_0 u' + u_0\rho_0 + \frac{\rho' v^2}{2} + \rho' u_0 + \rho' u'\right)\Delta V.$$

Здесь $\left(\frac{\rho_0 v^2}{2} + \frac{\rho' v^2}{2}\right)\Delta V$ — кинетическая энергия жидкости в элементе объема ΔV; $(\rho_0 u' + \rho' u_0)\Delta V$ — внутренняя энергия объема ΔV поля упругой волны; $\rho_0 u_0 \Delta V$ — внутренняя энергия этого элемента объема покоящейся среды.

Приращение внутренней энергии u' при адиабатическом изменении плотности от среднего значения ρ_0 до $\rho_0 + \rho'$ равно работе изменения объема единицы массы. В течение небольшого промежутка времени удельный объем жидкости изменится на небольшое значение

dV. При этом изменится и плотность на $d\rho = -\frac{1}{V^2}dV = -\rho_0^2\,dV$. Приращение внутренней энергии определится интегралом:

$$\rho_0 u'\,\Delta V = \left(-\rho_0 \int\limits_{V_0}^{V_0+V'} p\,dV\right)\Delta V = \left(\int\limits_{\rho_0}^{\rho_0+\rho'} \frac{p}{\rho_0}\,d\rho\right)\Delta V. \qquad \text{(VI.3.15)}$$

Подставляя $p = p_0 + p'$ и заменяя переменную ρ на $p = c^2(\rho - \rho_0) + p_0$, получим

$$\rho_0 u'\,\Delta V = \left(\int\limits_{p_0}^{c^2\rho'+p_0} \frac{p}{\rho_0 c^2}\,dp\right)\Delta V = \left(\frac{p^2}{2\rho_0 c^2}\Big|_{p_0}^{p_0+c^2\rho'}\right)\Delta V =$$

$$= \left\{\frac{1}{2\rho_0 c^2}\left[(c^2\rho'^2 + p_0)^2\right]\right\}\Delta V = \left(\frac{c^2}{2\rho_0}\rho'^2 + \frac{p_0}{\rho_0}\rho'\right)\Delta V. \qquad \text{(VI.3.16)}$$

Из этого следует, что в момент времени t полная энергия элемента объема равна

$$\Delta W = \left(\rho_0\frac{v^2}{2} + \rho'\frac{v^2}{2} + \frac{c^2}{2\rho_0}\rho'^2 + \frac{p_0\rho'}{\rho_0} + u_0\rho'\right)\Delta V. \qquad \text{(VI.3.17)}$$

Пусть v и ρ' — гармонические функции времени: $v = A\cos(\omega t - kx)$, $\rho' = B\cos(\omega t - kx - \alpha)$. Тогда среднее по периоду от энергии волны в объеме ΔV получается в результате сложения средних значений функции, пропорциональной ρ', и функции, пропорциональной $\cos^2(\omega t - kx - \alpha)$, $\cos^3(\omega t - \alpha)$. Известно, что средние по периоду от $\cos^3(\omega t - \alpha)$, $\cos(\omega t - \alpha)$ равны нулю, а для $\cos(\omega t - \alpha)$ имеет значение 1/2. Из этого следует, что средняя энергия упругой волны в объеме ΔV, если учесть, что $\rho' = p'/c^2 = \rho_0 v/c$, равна

$$\langle \Delta W\rangle = \left(\frac{1}{2}\frac{\rho_0 v_0^2}{2} + \frac{c^2}{2\rho_0}\frac{1}{2}p_0^2\right)\Delta V. \qquad \text{(VI.3.18)}$$

Из (VI.3.18) получаем формулу для вычисления плотности энергии плоской гармонической волны:

$$\langle W\rangle = \frac{\rho_0 v_0^2}{2}. \qquad \text{(VI.3.19)}$$

В плоской звуковой волне средняя плотность потока энергии $\langle Y\rangle = \langle pv\rangle = p_m v_m/2$. Используя связь между амплитудами давления и скорости: $p_m = \rho c v_0$, получаем

$$\mathcal{J} = \langle Y\rangle = \rho_0 c\frac{v_0^2}{2}\,\mathbf{n} = \langle W\rangle c\mathbf{n}, \qquad \text{(VI.3.20)}$$

где $\mathbf{n}$ — единичный вектор нормали к фронту волны; $\langle W\rangle$ — средняя плотность звуковой энергии.

Соотношение (VI.3.20) показывает, что интенсивность бегущей волны есть вектор, совпадающий с направлением распространения и численно равный произведению плотности энергии W на скорость звука. Таким образом, энергия волны распространяется со скоростью звука.

Формуле интенсивности звука (VI.3.20) можно сопоставить закон Джоуля — Ленца для электрической цепи:

$$W=\frac{R\mathcal{I}_0^2}{2}.$$

Здесь существует прямая аналогия между мощностью тепловых потерь W в электрической цепи и интенсивностью звука $\mathcal{I}$; между амплитудой колебательной скорости v_0 и амплитудой силы переменного тока I_0; между электрическим сопротивлением цепи R и удельным волновым сопротивлением $\rho_0 c$.

§ VI.4. ЗАТУХАНИЕ УПРУГИХ ВОЛН

Коэффициент поглощения энергии упругих волн. В реальных жидкостях и газах волновой процесс сопровождается рассеянием энергии упругой волны, так что по мере удаления от источника интенсивность плоской волны убывает. Это происходит как за счет необратимого превращения механической энергии в энергию молекулярного движения среды, так и за счет рассеяния энергии волны на различных неоднородностях.

Процесс уменьшения интенсивности упругих волн, как это подтверждается опытом, подчиняется закону, согласно которому уменьшение интенсивности плоской волны на пути распространения Δx пропорционально интенсивности $\mathcal{I}$ и длине отрезка Δx:

$$\Delta\mathcal{I} \doteq -\alpha_э \mathcal{I}\,\Delta x.$$

После перехода к пределу при $\Delta x \to 0$ получаем

$$\frac{d\mathcal{I}}{\mathcal{I}}=-\alpha_э\,dx. \qquad \text{(VI.4.1)}$$

Интегрируя в пределах x_0, x, найдем

$$\mathcal{I}=\mathcal{I}_0 e^{-\alpha_э x}. \qquad \text{(VI.4.2)}$$

Здесь $\mathcal{I}_0$ — интенсивность упругой волны в плоскости с координатой $x=x_0=0$; $\mathcal{I}$ — интенсивность, соответствующая координате x; $\alpha_э$ — энергетический коэффициент поглощения упругой волны.

Коэффициент затухания. Согласно (VI.3.21), интенсивность плоской волны связана с амплитудой давления упругих волн соотношением

$$\mathcal{I}=\frac{p_0^2}{2\rho_0 c}. \qquad \text{(VI.4.3)}$$

Сопоставляя (VI.4.2) и (VI.4.3), получаем закон убывания амплитуды давления:

$$p=p_0 e^{-\frac{\alpha_э}{2}x}=p_0 e^{-\alpha x}, \qquad \text{(VI.4.4)}$$

где α — коэффициент поглощения упругих волн.