Формуле интенсивности звука (VI.3.20) можно сопоставить закон Джоуля — Ленца для электрической цепи:

$$W=\frac{R\mathcal{I}_0^2}{2}.$$

Здесь существует прямая аналогия между мощностью тепловых потерь W в электрической цепи и интенсивностью звука $\mathcal{J}$; между амплитудой колебательной скорости v_0 и амплитудой силы переменного тока I_0; между электрическим сопротивлением цепи R и удельным волновым сопротивлением $\rho_0 c$.

§ VI.4. ЗАТУХАНИЕ УПРУГИХ ВОЛН

Коэффициент поглощения энергии упругих волн. В реальных жидкостях и газах волновой процесс сопровождается рассеянием энергии упругой волны, так что по мере удаления от источника интенсивность плоской волны убывает. Это происходит как за счет необратимого превращения механической энергии в энергию молекулярного движения среды, так и за счет рассеяния энергии волны на различных неоднородностях.

Процесс уменьшения интенсивности упругих волн, как это подтверждается опытом, подчиняется закону, согласно которому уменьшение интенсивности плоской волны на пути распространения Δx пропорционально интенсивности $\mathcal{J}$ и длине отрезка Δx:

$$\Delta\mathcal{J} \doteq -\alpha_э\mathcal{J}\,\Delta x.$$

После перехода к пределу при $\Delta x\to 0$ получаем

$$\frac{d\mathcal{J}}{\mathcal{J}}=-\alpha_э\,dx. \qquad (VI.4.1)$$

Интегрируя в пределах x_0, x, найдем

$$\mathcal{J}=\mathcal{J}_0 e^{-\alpha_э x}. \qquad (VI.4.2)$$

Здесь $\mathcal{J}_0$ — интенсивность упругой волны в плоскости с координатой $x=x_0=0$; $\mathcal{J}$ — интенсивность, соответствующая координате x; $\alpha_э$ — энергетический коэффициент поглощения упругой волны.

Коэффициент затухания. Согласно (VI.3.21), интенсивность плоской волны связана с амплитудой давления упругих волн соотношением

$$\mathcal{J}=\frac{p_0^2}{2\rho_0 c}. \qquad (VI.4.3)$$

Сопоставляя (VI.4.2) и (VI.4.3), получаем закон убывания амплитуды давления:

$$p=p_0 e^{-\frac{\alpha_э}{2}x}=p_0 e^{-\alpha x}, \qquad (VI.4.4)$$

где α — коэффициент поглощения упругих волн.

Таким образом, плоская гармоническая волна может быть представлена в виде

$$p = p_0 e^{-\alpha x} \cos(\omega t - kx), \qquad \text{(VI.4.5)}$$

или комплексной функцией

$$\tilde{p} = p_0 e^{-\alpha x} e^{j(\omega t - kx)}, \qquad \text{(VI.4.6)}$$

которую можно записать в виде формулы плоской волны с комплексным волновым числом $\tilde{k}$

$$\tilde{p} = p_0 e^{j(\omega t - \tilde{k}x)}, \qquad \text{(VI.4.7)}$$

где $\tilde{k} = k - j\alpha = k(1 + \alpha^2/k^2)\, e^{-j\varphi} = \omega(1 + \alpha^2 c^2/\omega^2)\, e^{-j\varphi}/c$; $\operatorname{tg}\varphi = -\alpha/k = -\alpha c/\omega$.

Поскольку потенциал скорости гармонической волны связан с давлением соотношением $\tilde{\Phi} = \tilde{p}/(j\omega\rho_0)$, можно записать формулу для потенциала скорости волн с учетом затухания в виде

$$\tilde{\Phi} = \Phi_0 e^{j(\omega t - \tilde{k}x)}. \qquad \text{(VI.4.8)}$$

Разумеется, функции (VI.4.7) и (VI.4.8) удовлетворяют волновому уравнению, только в нем появится комплексный коэффициент $\tilde{c}^2$:

$$\frac{\partial^2 \tilde{\Phi}}{\partial t^2} - \tilde{c}^2 \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}}{\partial x^2} = 0. \qquad \text{(VI.4.9)}$$

Естественно, это относится также к двухмерным и трехмерным волнам. Для описания затухающих волн в пространстве можно использовать уравнения типа (VI.4.9) в виде

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\tilde{\Phi} - \frac{\tilde{E}_s}{\rho}\Delta\tilde{\Phi} = 0, \qquad \text{(VI.4.10)}$$

где $\tilde{E} = 1/\tilde{\beta}_0 = E' + jE''$ — комплексный модуль упругости.

Этому уравнению удовлетворяет функция (VI.4.8) при условии, что

$$\frac{\tilde{E}}{\rho_0} = \frac{\omega^2}{\tilde{k}^2} = \frac{\omega^2}{(k - j\alpha)^2},$$

или

$$\frac{\tilde{E}}{\rho_0} = \frac{E'}{\rho_0} + j\frac{E''}{\rho_0} = \frac{\omega^2}{(\omega/c - j\alpha)^2}, \qquad \text{(VI.4.11)}$$

где $k = \omega/c$.

Уравнение (VI.4.11) можно решить относительно волнового числа ω/c и коэффициента поглощения α или в зависимости от поставленной задачи относительно действительной E' и мнимой E'' частей комплексного модуля упругости. В первом случае получается:

$$\frac{\omega}{c} = \sqrt{\frac{(\varphi - 1)\rho_0\omega^2}{2\varphi^2 E'}},$$
$$\alpha = \sqrt{\frac{(\varphi + 1)\rho_0\omega^2}{2\varphi^2 E'}} \quad (\varphi = E''/E'), \qquad \text{(VI.4.12)}$$

во втором:

$$E' = \frac{(k^2-\alpha^2)\rho_0\omega^2}{(k^2+\alpha^2)^2}, \quad E'' = \frac{2\alpha k\rho_0\omega^2}{(k^2+\alpha^2)^2}.$$

Заменяя k его выражением через фазовую скорость распространения звука $k=\omega/c$, получаем:

$$E' = \frac{(1-\alpha^2c^2/\omega^2)\rho_0c^2}{(1+\alpha^2c^2/\omega^2)^2}, \quad E'' = \frac{2\rho_0c^2\alpha c/\omega}{[1+(\alpha c/\omega)^2]^2}. \tag{VI.4.13}$$

Из этих формул следует, что, измеряя скорость c распространения упругой волны и коэффициент затухания α, можно вычислить комплексный модуль упругости. При малом затухании ($\alpha^2c^2/\omega^2 \ll 1$) выражения (VI.4.13) можно упростить:

$$E' \approx \rho_0c^2, \quad E'' \approx 2\rho_0c^2\alpha c/\omega. \tag{VI.4.14}$$

Иногда требуется вычислить акустические величины (скорость c и коэффициент поглощения α) по измеренным значениям действительной и мнимой частей комплексного модуля упругости. В этом случае можно пользоваться формулами (VI.4.13). Нетрудно показать, что отношение действительной части модуля упругости к мнимой его части равно добротности колебательной системы:

$$Q = \frac{E'}{E''} = \frac{k^2-\alpha^2}{2k\alpha} \approx \frac{k}{2\alpha} = \frac{\omega}{2c\alpha}. \tag{VI.4.15}$$

Это соотношение полезно применять для вычислений акустических параметров жидкости при малых затуханиях.

§ VI.5. СКОРОСТЬ ЗВУКА В ГАЗАХ И ЖИДКОСТЯХ

Скорость звука в газах. Для вычисления скорости распространения упругих волн можно применить формулу

$$c^2 = \frac{1}{\rho_0\beta_s}, \tag{VI.5.1}$$

где β_s — адиабатическая сжимаемость жидкости или газа.

Если учесть определение коэффициента адиабатической сжимаемости

$$\beta_s = -\frac{1}{v}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_s, \tag{VI.5.2}$$

где $v=1/\rho$ — удельный объем, то формулу скорости (VI.4.1) можно связать с уравнением состояния $p(\rho, T)$. С этой целью воспользуемся соотношением между адиабатической и изотермической сжимаемостями (VI.2.3): $\beta_s = c_v/c_p\,\beta_T$.

Заменим удельный объем через плотность ρ и после подстановки формулы (VI.5.1) получим

$$c^2 = \frac{c_p}{c_v}\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_T. \tag{VI.5.3}$$