во втором:

$$E' = \frac{(k^2 - \alpha^2)\rho_0\omega^2}{(k^2+\alpha^2)^2}, \quad E'' = \frac{2\alpha k\rho_0\omega^2}{(k^2+\alpha^2)^2}.$$

Заменяя k его выражением через фазовую скорость распространения звука $k = \omega/c$, получаем:

$$E' = \frac{(1 - \alpha^2c^2/\omega^2)\rho_0c^2}{(1+\alpha^2c^2/\omega^2)^2}, \quad E'' = \frac{2\rho_0c^2\alpha c/\omega}{[1+(\alpha c/\omega)^2]^2}. \tag{VI.4.13}$$

Из этих формул следует, что, измеряя скорость c распространения упругой волны и коэффициент затухания α, можно вычислить комплексный модуль упругости. При малом затухании ($\alpha^2c^2/\omega^2 \ll 1$) выражения (VI.4.13) можно упростить:

$$E' \approx \rho_0c^2, \quad E'' \approx 2\rho_0c^2\alpha c/\omega. \tag{VI.4.14}$$

Иногда требуется вычислить акустические величины (скорость c и коэффициент поглощения α) по измеренным значениям действительной и мнимой частей комплексного модуля упругости. В этом случае можно пользоваться формулами (VI.4.13). Нетрудно показать, что отношение действительной части модуля упругости к мнимой его части равно добротности колебательной системы:

$$Q = \frac{E'}{E''} = \frac{k^2 - \alpha^2}{2k\alpha} \approx \frac{k}{2\alpha} = \frac{\omega}{2c\alpha}. \tag{VI.4.15}$$

Это соотношение полезно применять для вычислений акустических параметров жидкости при малых затуханиях.

§ VI.5. СКОРОСТЬ ЗВУКА В ГАЗАХ И ЖИДКОСТЯХ

Скорость звука в газах. Для вычисления скорости распространения упругих волн можно применить формулу

$$c^2 = \frac{1}{\rho_0\beta_s}, \tag{VI.5.1}$$

где β_s — адиабатическая сжимаемость жидкости или газа.

Если учесть определение коэффициента адиабатической сжимаемости

$$\beta_s = -\frac{1}{v}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_s, \tag{VI.5.2}$$

где $v = 1/\rho$ — удельный объем, то формулу скорости (VI.4.1) можно связать с уравнением состояния $p(\rho, T)$. С этой целью воспользуемся соотношением между адиабатической и изотермической сжимаемостями (VI.2.3): $\beta_s = c_v/c_p\,\beta_T$.

Заменим удельный объем через плотность ρ и после подстановки формулы (VI.5.1) получим

$$c^2 = \frac{c_p}{c_v}\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_T. \tag{VI.5.3}$$

Для вычисления скорости звука по этой формуле необходимо иметь уравнение состояния вещества, т. е. функциональную зависимость между давлением, плотностью и температурой. Опыт показывает, что газы и пары при низком давлении и достаточно высокой температуре подчиняются уравнению состояния Менделеева — Клапейрона:

$$p = \rho \frac{RT}{\mu}, \qquad \text{(VI.5.4)}$$

где ρ — плотность газа; $R = 8{,}3$ Дж/(моль · К) — молярная газовая постоянная; T — температура; μ — молярная масса, кг/моль.

Пользуясь формулой (VI.5.3) и уравнением состояния газа (VI.5.4), нетрудно получить для скорости звука в идеальном газе выражение

$$c = \sqrt{\frac{c_p}{c_v}\frac{RT}{\mu}} = \sqrt{\frac{c_p}{c_v}\frac{p}{\rho_0}}. \qquad \text{(VI.5.5)}$$

Эта формула содержит давление p и плотность ρ как функции температуры. Как известно, $p/\rho = (p_0/\rho_0)(1+\alpha^{(v)}t)(1+\alpha^{(p)}t) = (p_0/\rho_0) \times \times (1 + t/273)^2$ при $\alpha^{(v)} = \alpha^{(p)} = \alpha = 1/273$ град$^{-1}$ и вместо (VI.5.5) можно записать

$$c = \sqrt{\frac{c_p}{c_v}(1+\alpha t)\frac{p_0}{\rho_0}} = \left(1 + \frac{t}{273}\right)\sqrt{\frac{c_p}{c_v}\frac{p_0}{\rho_0}}, \qquad \text{(VI.5.6)}$$

где t — температура, град.

Для воздуха ($\rho_0 = 1{,}293 \cdot 10^{-3}$ кг/м^3; $p_0 = 10{,}23$ Па; $c_p/c_v = 1{,}41$), $c \approx 331{,}3 + 1{,}21t$, м/с.

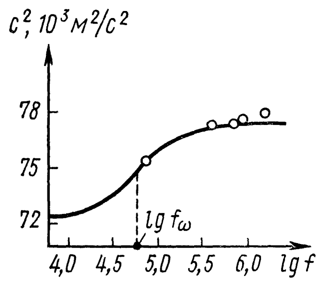

Рис. VI.5.1

Скорость звука (см. ч. II, гл. IX), вычисленная по (VI.5.3.), соответствует волнам с периодом колебаний, во много раз превышающим время установления состояния термодинамического равновесия (время релаксации). Например, скорость звука в углекислом газе не зависит от частоты f и может быть вычислена по (VI.5.5.), но при частотах ниже, чем 100 кГц; на более высоких частотах скорость звука в CO_2 увеличивается приблизительно на 4% и при частотах, превышающих 1000 кГц, не зависит от частоты (рис. VI.5.1). Для газа, удовлетворяющего уравнению состояния

$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right)\left(V - b\right) = RT, \qquad \text{(VI.5.7)}$$

с учетом (VI. 5. 3) получается более сложная формула скорости звука:

$$c = \sqrt{\frac{RT}{\mu(1 - b/V)}\left(\frac{R}{c_V} + 1\right) - \frac{2a}{\mu V}}. \qquad \text{(VI.5.8)}$$

Для вычисления скорости звука в газе по этой формуле следует знать постоянные Ван-дер-Ваальса a и b, а также теплоемкость при постоянном объеме c_V. Опыт показывает, что уравнение (VI.5.8) неудовлетворительно отражает экспериментальные данные только для области, лежащей вблизи критического состояния вещества. Расхождение теории с опытом получается потому, что здесь применяют неточное уравнение состояния.

Часто для реальных газов используют уравнение состояния с вириальными коэффициентами:

$$pV = RT\left(1 + \frac{B}{V} + \frac{C}{V^2}\right), \tag{VI.5.9}$$

где B и C — второй и третий вириальные коэффициенты.

Учитывая лишь второй вириальный коэффициент и пренебрегая его высшими степенями, получаем формулу для скорости звука в реальном газе:

$$c = \left(\frac{C_p}{C_V}\frac{RT + 2Bp}{\mu}\right)^{1/2}, \tag{VI.5.10}$$

которая может быть использована для вычисления как скорости звука, так и вириального коэффициента B, а также для вычисления отношения теплоемкостей C_p/C_V.

Скорость звука в жидкостях. При определении скорости в жидкостях по формуле (VI.5.3) можно воспользоваться значениями изотермической сжимаемости жидкости и теплоемкостей C_p и C_V, полученными экспериментально. Можно также с помощью уравнений термодинамики преобразовать формулу (VI.5.3) к виду

$$c = \frac{1}{\rho}\left(\frac{T}{\mu C_V}\right)^{1/2}\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V\left[1 - \frac{C_V\,(\partial p/\partial V)_T}{T\,(\partial p/\partial T)_V}\right]. \tag{VI.5.11}$$

Однако для оценки зависимости скорости звука от структуры жидкости полезно проанализировать выражение для скорости звука, если в нем учесть уравнение состояния конденсированных сред. Простейшее уравнение такого рода — уравнение, предложенное Френкелем:

$$p = \frac{\kappa T}{v} - \frac{\partial\varphi}{\partial v}, \tag{VI.5.12}$$

где φ — потенциальная энергия взаимодействия молекул в жидкости; k — постоянная Больцмана: v — объем, приходящийся на одну молекулу. В качестве потенциальной энергии взаимодействия выбирается приближенная формула потенциала, пригодная для молекул сферической формы,— функция Ленарда — Джонса:

$$\varphi = \frac{\alpha}{v^{\mu}} - \frac{\beta}{v^{\nu}}. \tag{VI.5.13}$$

Применяя эту приближенную формулу к уравнению адиабатической скорости, получим

$$\frac{c^2}{c_p/c_V} = \frac{kT}{m} + \frac{v^2}{m}\frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2},$$

или

$$\frac{mc^2}{2c_p/c_V} = \frac{kT}{2} + \frac{1}{2}v^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}. \tag{VI.5.14}$$

Как известно, давление в газах определяется ударами молекул о стенки сосуда, т. е. является результатом действия молекул, находящихся в поступательном движении. В конденсированных средах молекулы находятся вблизи одна другой и взаимодействуют, поэтому следует учитывать силы молекулярного взаимодействия: общее давление складывается из давления, возникающего за счет поступательного движения, и внутримолекулярного давления p_i:

$$p = \frac{RT}{V} + p_i = \frac{NkT}{Nv} + p_i.$$

В уравнении (VI.5.12) второе слагаемое, очевидно, обозначает силу межмолекулярного взаимодействия, отнесенную к одной молекуле. Поэтому в формуле (VI.5.14), где $kT/2$ — кинетическая энергия, приходящаяся на одну поступательную степень свободы молекулы; $\frac{1}{2} v^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2}$ — потенциальная энергия на одну степень свободы.

В жидкостях второе слагаемое значительно больше, чем первое, и поэтому формула (VI.5.14) для жидкости приблизительно имеет вид

$$\frac{mc^2}{2c_p/c_V} = \frac{1}{2} v^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2}. \qquad \text{(VI.5.15)}$$

Наоборот, в идеальных газах силами взаимодействия молекул можно пренебречь, и формула (VI.5.14) для идеального газа приобретает вид

$$\frac{mc^2}{2c_p/c_V} = \frac{1}{2} kT. \qquad \text{(VI.5.16)}$$

В общем виде формулу (VI.5.14) можно преобразовать к виду, удобному при вычислении скорости звука в жидкостях, для которых известен потенциал взаимодействия сил. С этой целью подставим вместо объема, приходящегося на одну молекулу жидкости, $v \approx r\sigma_0$ (σ_0 — площадь сечения молекулы, r — межмолекулярное расстояние) и получим

$$\frac{mc^2}{c_p/c_V} = kT + r^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2}. \qquad \text{(VI.5.17)}$$

Для температур жидкого состояния $kT \ll r^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2}$, поэтому

$$\frac{c^2}{c_p/c_V} = r^2 \frac{\varphi''}{m}. \qquad \text{(VI.5.18)}$$

Массу одной молекулы можно представить как произведение средней плотности жидкости на объем, приходящийся на одну молекулу: $m \approx \rho_0 \sigma_0 r \approx \rho_0 r^3$. Тогда

$$\frac{c^2}{c_p/c_V} \approx r^2 \frac{\varphi''}{\rho_0 r^3} \approx \frac{\varphi''}{\rho_0 r}.$$

Скорость звука в жидкости с шаровидными молекулами можно вычислить по формуле

$$\frac{c^2}{c_p/c_V} \approx \frac{\varphi''}{\rho_0 r}, \qquad \text{(VI.5.19)}$$

впервые полученной Б. Б. Кудрявцевым при $c_p/c_V = 1$. Здесь она приведена для общего случая, когда отношение теплоемкости отличается от единицы.

Скорость звука в жидкостях связана с теми физическими характеристиками жидкости, которые непосредственно определяются энергией потенциального взаимодействия молекул. К этим характеристикам относят параметры критического состояния вещества, поверхностное натяжение, теплоту испарения и т. д. В связи с этим для приблизительных вычислений можно найти выражения для скорости звука, связанные с этими характеристиками жидкости. Например, можно показать, что скорость звука выражается через коэффициент поверхностного натяжения:

$$c^2 = (2mn\gamma N^{1/3}) \frac{\sigma}{\rho^{2/3}} + \gamma \frac{RT}{\mu}, \qquad \text{(VI.5.20)}$$

где σ — поверхностное натяжение; n и γ — эмпирические постоянные; m для всех жидкостей равно 2.

Имеется эмпирическая формула скорости звука, куда входит эмпирическая константа — парахор *

$$P = (\mu\sigma^{1/4})/(\rho_ж - \rho_{н.п}),$$
$$c = 4{,}66 \sqrt{\frac{c_p}{c_V} \left(\frac{\rho_0 P}{\mu}\right)^2 \left(\frac{N}{\rho^2 \mu}\right)^{1/6}}. \qquad \text{(VI.5.21)}$$

Здесь число 4,66 — постоянный коэффициент, определяемый экспериментально.

Аналогично можно получить приближенную формулу скорости звука, выраженную через критические параметры вещества:

$$\frac{\mu c^2}{\gamma} = RT + AkN^{1/3} (T_к - T - \Delta), \qquad \text{(VI.5.22)}$$

где $A = (4{,}66)^2$; $\Delta = T_к - T_{и.м} \approx 0$; $T_{и.м}$ — температура исчезновения мениска; $T_к$ — критическая температура; $k = 2{,}1$ — постоянная Этваша.

Эти формулы позволяют вычислить скорость звука в органических жидкостях с небольшой точностью (7—10)%. В некоторых случаях этой точности достаточно. Для гидроакустики такие приближенные формулы непригодны, здесь необходима точность порядка долей процента. В связи с этим используют эмпирические формулы скорости звука в морской воде. Например,

$$c = 1450 + 4{,}20\Theta - 0{,}037\Theta^2 + 0{,}018p + 1{,}14 (q - 35), \qquad \text{(VI.5.23)}$$

где q — соленость, мг/л; p — давление; Θ — температура, °С.

* Парахор P обладает аддитивными свойствами: молярный парахор является суммой парахоров атомов (или атомных групп) и связей, образующих молекулу.