Очевидно, замена местами сред не повлечет за собой изменения в коэффициенте прохождения звука по интенсивности.

Что касается коэффициентов скорости и давления, то можно легко показать, что при изменении направления прохождения звука на обратное эти коэффициенты просто поменяются друг с другом названиями: коэффициенты для давления станут коэффициентами для скорости, и наоборот.

В этом случае у границы раздела с жесткой средой образуются пучность давления и узел скорости. Примечательно то обстоятельство, что на самой границе раздела будет наблюдаться давление, равное почти удвоенному давлению падающей волны. Поэтому гидрофон или другой измеритель интенсивности, реагирующий на давление, с размерами больше, чем длина звуковой волны, будет показывать завышенное давление. Чтобы гидрофон показывал такое же давление, какое существует в свободной звуковой волне, надо или добиться отсутствия отраженной от гидрофона волны, или выполнить его по размерам меньше, чем длина звуковой волны в данной среде.

§ VII.2. ПРОХОЖДЕНИЕ ЗВУКА ЧЕРЕЗ ПЛОСКУЮ ГРАНИЦУ РАЗДЕЛА ДВУХ СРЕД ПРИ КОСОМ ПАДЕНИИ

Пусть две среды с плотностями и сжимаемостями ρ_1, β_{1s} и ρ_2, β_{2s} имеют плоскую границу раздела. Рассмотрим распространение плоской волны из первой среды во вторую под углом θ к нормали. Плоская волна будет частично проходить через границу во вторую среду, частично отражаться, в результате чего в первой среде образуется звуковое поле, состоящее из первичной φ_1 и отраженной φ_1' волн. Во второй же среде должно существовать поле прошедшей волны φ_2.

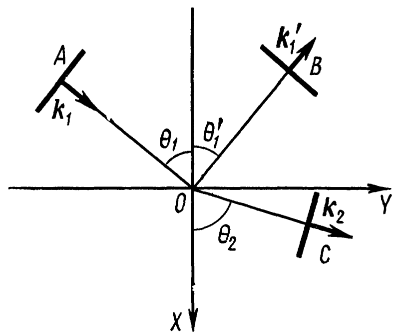

Рис. VII.2.1

Спрашивается, каков характер поля в первой и второй средах?

Для количественного изучения явлений выберем систему координат так, чтобы плоскость раздела была перпендикулярна координатной плоскости XOY, а направление распространения волн соответствовало направлениям, указанным на рис. VII.2.1 (AO — направление падающей, OB — отраженной, OC — проходящей волн).

Отражение от жесткой неограниченной плоскости. Пусть плоская волна падает на границу под углом θ к нормали и полностью отражается под углом θ'.

Падающую и отраженную волны можно представить с помощью выражения (VI.2.5) для фазы плоской волны:

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= A_1 e^{i\,(\omega t - a_1 x - b_1 y)}\\ \varphi_2 &= A_2 e^{i\,(\omega t + a_1' x - b_1' y)},\end{aligned} \qquad \text{(VII.2.1)}$$

где

$$a_1 = k_{1x} = k_1 \cos\theta_1;\ \ b_1 = k_{1y} = k_1 \sin\theta_1,$$
$$a_1' = k_{1x}' = k_1 \cos\theta_1';\ \ b_1' = k_{1y}' = k_1 \sin\theta_1',$$

k_{1x}, k_{1y}, k'_{1x}, k'_{1y} — проекции волновых векторов падающей и отраженной волн на оси ординат X и Y (рис. VII.2.2).

На границе с жесткой плоскостью при $X=0$ из (VII.2.1) $\sin_1 = -y\sin\theta$; $\sin_2 = -y\sin\theta'$ имеем условие равенства нулю колебательной скорости

$$\dot{\xi}_1 + \dot{\xi}_2 = 0,$$

или, используя потенциалы скорости φ_1 и φ_2 $(\dot{\xi} = -\partial\varphi/\partial x)$, получим

$$\partial\varphi_1/\partial x + \partial\varphi_2/\partial x = 0. \qquad \text{(VII.2.1')}$$

После дифференцирования (VII.2.1) и подстановки в (VII.2.1′) найдем

$$A_1\cos\theta_1 e^{-jky\sin\theta_1} = A_2\cos\theta_2 e^{-jky\sin\theta_2}. \qquad \text{(VII.2.2)}$$

Условие (VII.2.2) удовлетворяется только в случае, когда

$$\sin\theta_1 = \sin\theta_2, \qquad \text{(VII.2.3)}$$

откуда $\theta_1 = \theta_2$, т. е. $A_1\cos\theta_1 = A_2\cos\theta_2$, $A_1 = A_2$.

Таким образом, при отражении плоской волны от жесткой плоскости угол падения равен углу отражения, а амплитуды падающей и отраженной волн равны друг другу.

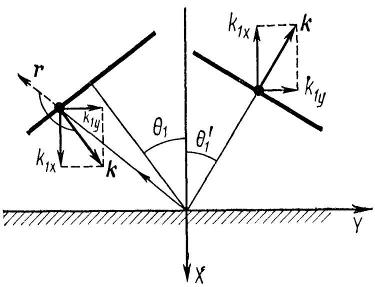

Рис. VII.2.2

Чтобы получить представление о характере волнового поля, составим сумму потенциалов скоростей и учтем соотношение (VII.2.3), т. е. равенство углов и амплитуд:

$$\varphi_1 + \varphi_2 = A_1 e^{j(\omega t - kx\cos\theta - ky\sin\theta)} + A_2 e^{j(\omega t + kx\cos\omega - ky\sin\theta)} = 2A_1\cos(kx\cos\theta)\, e^{j(\omega t - ky\sin\theta)}. \qquad \text{(VII.2.4)}$$

Волновое поле перед абсолютно отражающей плоскостью определяют волновым числом $k' = \omega/c' = k\sin\theta$, которое характеризует волну, распространяющуюся в сторону возрастающих значений y с фазовой скоростью

$$c' = c/\sin\theta, \qquad \text{(VII.2.5)}$$

так как $k' = \omega/c' = (\omega/c)\sin\theta$.

Амплитуда этих волн (такие волны называют *волновым следом*) зависит от x. Она изменяется по закону $2A_1\cos(kx\cos\theta)$. Очевидно, что $2A_1\cos(kx\cos\theta)$ при

$$kx\cos\theta = \frac{2\pi}{\lambda}x\cos\theta = (2n+1)\frac{\pi}{2},$$

где $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ — любое целое число.

Таким образом, нулевые значения амплитуды имеют координаты

$$x_n = (2n+1)\frac{\lambda}{4\cos\theta} \qquad \text{(VII.2.6)}$$

и находятся на расстояниях друг от друга $\lambda/(2\cos\theta)$. Только при угле падения $\theta=0$, т. е. при нормальном падении, расстояние между узлами в точности равно $\lambda/2$.

Между двумя узловыми значениями амплитуды следа располагаются максимумы амплитуд. Координаты максимумов амплитуд имеют значения

$$x_n = 2n\frac{\lambda}{4\cos\theta}.$$

Очевидно, что расстояние между двумя соседними максимумами также равно $\lambda/2\cos\theta$. При уменьшении угла падения до нуля, места нулевых амплитуд обращаются в узлы, а места максимумов — в пучности стоячей волны. Это обстоятельство имеет большое значение при определении длины волны с помощью измерения расстояния между пучностями или узлами в стоячей волне. Это расстояние равно $\lambda/2$ только при строгом падении луча по нормали к поверхности раздела. При отклонении угла θ от нуля за счет неправильности установки отражателя возникает ошибка в определении длины волны, что вызывает ошибку в измерении скорости звука. Исходя из этого, в приборах — ультразвуковых интерферометрах — рефлекторы и источники плоских волн устанавливают так, чтобы угол падения был точно равен нулю.

Распространение плоских волн при наклонном падении на границу раздела. Пусть плоская граница разделяет две несмешивающиеся жидкости *1* и *2* с плотностями ρ_1, ρ_2 и сжимаемостями β_{s1}, β_{s2}. Допустим, что в первой среде по направлению θ_1 в сторону к границе раздела распространяется плоская волна φ_1. Требуется определить волновое поле в обеих жидкостях, которое возникает в результате преломления и отражения падающей волны φ_1 от границы раздела сред. Расположим ось x декартовой системы координат по направлению нормали к границе раздела, а плоскость XOY — параллельно волновому вектору k_1 падающей волны (см. рис. VII.2.1). Поля упругих волн в обеих жидкостях должны удовлетворять волновым уравнениям

$$\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial t^2} - \frac{1}{\rho_1\beta_{s1}}\left(\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi_1}{\partial y^2}\right) = 0, \qquad \text{(VII.2.7)}$$

$$\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial t^2} - \frac{1}{\rho_2\beta_{s2}}\left(\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi_2}{\partial y^2}\right) = 0 \qquad \text{(VII.2.8)}$$

и граничным условиям

$$\rho_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial t}\bigg|_{x=0} = \rho_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial t}\bigg|_{x=0}, \qquad \text{(VII.2.9)}$$

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\bigg|_{x=0} = \frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\bigg|_{x=0},$$

поэтому потенциал поля в первой среде будет состоять из потенциала падающей волны, заданного функцией $\varphi = A_1 e^{j[\omega t - (\mathbf{k}_1\mathbf{r})]}$, и потенциала φ' отраженной волны, а поле во второй среде — из потенциала скорости φ_2 во второй среде. Функции поля отраженной и преломленной волн необходимо определить.

Предположим, что решения уравнений (VII.2.7) и (VII.2.8) таковы:

$$\varphi_1 = \varphi + \varphi' = A_1 e^{j(\omega t - a_1 x - b_1 y)} + A'_1 e^{j(\omega t + a'_1 x - b'_1 y)},$$
$$\varphi_2 = A_2 e^{j(\omega t - a_2 x - b_2 y)}, \qquad \text{(VII.2.10)}$$

где $a_1 = k_1 \cos\theta_1$; $a_2 = k_2 \cos\theta_2$; $a'_1 = k' \cos\theta'_1$; $b'_1 = k'_1 \sin\theta'_1$; $b_1 = k_1 \sin\theta_1$; $b_2 = k_2 \sin\theta_2$; $k_1 = \omega/c_1$; $k_2 = \omega/c_2$; $k'_1 = \omega/c'_1$.

Путем подстановки (VII.2.10) в (VII.2.8) получим тождества, которые могут существовать, если $c_1 = c'_1 = \sqrt{1/(\rho_1\beta_{s1})}$ и $c_2 = \sqrt{1/(\rho_2\beta_{s2})}$.

Решения (VII.2.10) должны удовлетворять граничным условиям (VII.2.9), откуда следует:

$$\rho_1\left(A_1 e^{-jb_1 y} + A'_1 e^{-jb'_1 y}\right) = \rho_2 A_2 e^{-jb_2 y},$$
$$A_1 a_1 e^{-jb_1 y} - A'_1 a'_1 e^{-jb'_1 y} = A_2 e^{-jb_2 y}. \qquad \text{(VII.2.11)}$$

Уравнения (VII.2.11) справедливы для произвольных значений y, поэтому все экспоненциальные множители, содержащие в показателях степени переменную y, должны сокращаться, т. е. быть равными друг другу ($b_1 = b'_1 = b_2$). Подставляя сюда $b_1 = k_1 \sin\theta_1$, $b'_1 = k_1 \sin\theta'_1$, $b_2 = k_2 \sin\theta_2$, получим соотношение, называемое *законом преломления*:

$$\sin\theta_1/c_1 = \sin\theta'_1/c_1 = \sin\theta_2/c_2. \qquad \text{(VII.2.12)}$$

Сокращая в системе уравнений (VII.2.11) общие множители, получим

$$\left.\begin{aligned} \rho_1(A_1 + A'_1) &= \rho_2 A_2, \\ a_1 A_1 - a_2 A'_1 &= a_2 A_2. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(VII.2.13)}$$

Эта система имеет следующее решение:

$$\frac{A'_1}{A_1} = \frac{\rho_2/\rho_1 - a_2/a_1}{\rho_2/\rho_1 + a_2/a_1}, \quad \frac{A_2}{A_2} = \frac{2}{\rho_2/\rho_1 + a_2/a_1}.$$

Учитывая выражения для a_1 и a_2 и преобразовывая A'_1/A_1 и A_2/A_1, получаем:

$$A'_1/A_1 = (\varepsilon_\theta - 1)/(\varepsilon_\theta + 1), \quad A_2/A_1 = \rho_1/\rho_2 \cdot [2\varepsilon_\theta/(\varepsilon_\theta + 1)], \qquad \text{(VII.2.14)}$$

где $\varepsilon_\theta = \dfrac{\rho_2 c_2/\cos\theta_2}{\rho_1 c_1/\cos\theta_1}$ — приведенное волновое сопротивление для косого падения плоской волны.

Так как $p = j\omega\rho\varphi$; $\dot{\xi} = -\partial\varphi/\partial S = jk\varphi$, то

$$r_p = \frac{j\omega\rho_1 A'_1}{j\omega\rho_1 A_1} = \frac{A'_1}{A_1}, \quad t_p = \frac{j\omega\rho_2 A_2}{j\omega\rho_1 A_1} = \frac{\rho_2}{\rho_1} \cdot \frac{A_2}{A_1},$$
$$t_{\dot{\xi}} = \frac{jk_2 A_2}{jk_1 A_1} = \frac{c_1}{c_2}\frac{A_2}{A_1}, \quad r_{\dot{\xi}} = -\frac{jk_1 A'_1}{jk_1 A_1} = -\frac{A'_1}{A_1}, \qquad \text{(VII.2.15)}$$

или с учетом (VII.2.14) и (VII.2.15):

$$r_p = \frac{\varepsilon_\theta - 1}{\varepsilon_\theta + 1}, \quad r_{\dot{\xi}} = \frac{1 - \varepsilon_\theta}{1 + \varepsilon_\theta},$$
$$t_p = \frac{2\varepsilon_\theta}{\varepsilon_\theta + 1}, \quad t_{\dot{\xi}} = \frac{\cos\theta_1}{\cos\theta_2} \cdot \frac{2}{\varepsilon_\theta + 1}. \qquad \text{(VII.2.16)}$$

Когда числитель в формуле (VII. 2.14) равен нулю, то $\varepsilon_\theta = 1$ и отраженной волны не будет. Совмещая это условие с законом преломления $\sin\theta_1/\sin\theta_2 = c_1/c_2$, можно найти формулу для угла падения, при котором волны не отражаются от границы раздела:

$$\operatorname{ctg}\theta_1 = \frac{\sqrt{(c_1/c_2)^2 - 1}}{\sqrt{\rho_2/\rho_1 - (c_1/c_2)^2}}. \qquad \text{(VII.2.17)}$$

Этот угол существует только для жидкостей, у которых $\frac{\rho_2}{\rho_1} > \frac{c_1}{c_2} > 1$. Например, у этилового спирта $\rho_1 = 0{,}79$ г/см^3, $c_1 = 1{,}18 \times 10^5$ см/с, у хлороформа $\rho_2 = 1{,}49$ г/см^3, $c_2 = 1{,}00 \cdot 10^5$ см/с, поэтому для границы раздела этиловый спирт — хлороформ угол, при котором не существует отраженной волны, определяется $\operatorname{ctg}\theta_1 = 0{,}43$, откуда $\theta_1 = 67°$.

§ VII.3. ПОЛНОЕ ВНУТРЕННЕЕ ОТРАЖЕНИЕ

Исследуем особый случай явлений на границе раздела двух сред, когда волны полностью отражаются в первую среду.

Из закона преломления следует, что $\sin\theta_2 = (c_2/c_1)\sin\theta_1$ и, если $c_2/c_1 > 1$, то угол преломления θ_2 больше угла падения θ_1. При угле

$$\theta_1 \geqslant \theta_k = \arcsin(c_1/c_2) \qquad \text{(VII.3.1)}$$

волна полностью отражается от границы раздела. Это явление называют *полным внутренним отражением*, а угол $\theta_к$ — критическим.

Для углов $\theta_1 > \theta_к$ косинус угла преломления — мнимый:

$$\cos\theta_2 = \sqrt{1 - \sin^2\theta_2} = \pm j\sqrt{[(c_2/c_1)\sin\theta_1]^2 - 1}.$$

Нормальная компонента волнового вектора преломленной волны $k_{2x} = a_2 = k_2\cos\theta$ — также мнимое число. Обозначим его в виде

$$a_2 \pm j\alpha = \pm k_2\sqrt{[(c_2/c_1)\sin\theta_1]^2 - 1}.$$

Тогда косинус мнимого угла

$$\cos\theta_2 = a_2/k_2 = \pm j\alpha/k_2.$$

Относительные амплитуды отраженной и преломленной волн при закритических углах определяются формулами:

$$\frac{A_1'}{A_1} = \frac{\rho_2/\rho_1 \pm j\alpha/a_1}{\rho_2/\rho_1 \mp j\alpha/a_1} = e^{j2\psi},$$

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{2}{\rho_2/\rho_1 \pm j\alpha/a_1} = \frac{2}{\sqrt{(\rho_2/\rho_1)^2 + (\alpha/a_1)^2}}e^{j\psi}, \qquad \text{(VII.3.2)}$$

где $\operatorname{tg}\psi = \alpha\rho_1/(\alpha_1\rho_2)$.

В первой среде суммарная волна состоит из падающей и отраженной:

$$\varphi_1 = A_1\left(e^{j(\omega t - a_1x - b_1y)} + e^{j(\omega t + a_1x - b_1y + 2\psi)}\right).$$