Когда числитель в формуле (VII. 2.14) равен нулю, то $\varepsilon_\theta = 1$ и отраженной волны не будет. Совмещая это условие с законом преломления $\sin\theta_1/\sin\theta_2 = c_1/c_2$, можно найти формулу для угла падения, при котором волны не отражаются от границы раздела:

$$\operatorname{ctg}\theta_1 = \frac{\sqrt{(c_1/c_2)^2 - 1}}{\sqrt{\rho_2/\rho_1 - (c_1/c_2)^2}}. \qquad \text{(VII.2.17)}$$

Этот угол существует только для жидкостей, у которых $\frac{\rho_2}{\rho_1} > \frac{c_1}{c_2} > 1$. Например, у этилового спирта $\rho_1 = 0{,}79$ г/см^3, $c_1 = 1{,}18 \times 10^5$ см/с, у хлороформа $\rho_2 = 1{,}49$ г/см^3, $c_2 = 1{,}00 \cdot 10^5$ см/с, поэтому для границы раздела этиловый спирт — хлороформ угол, при котором не существует отраженной волны, определяется $\operatorname{ctg}\theta_1 = 0{,}43$, откуда $\theta_1 = 67°$.

§ VII.3. ПОЛНОЕ ВНУТРЕННЕЕ ОТРАЖЕНИЕ

Исследуем особый случай явлений на границе раздела двух сред, когда волны полностью отражаются в первую среду.

Из закона преломления следует, что $\sin\theta_2 = (c_2/c_1)\sin\theta_1$ и, если $c_2/c_1 > 1$, то угол преломления θ_2 больше угла падения θ_1. При угле

$$\theta_1 \geqslant \theta_k = \arcsin(c_1/c_2) \qquad \text{(VII.3.1)}$$

волна полностью отражается от границы раздела. Это явление называют *полным внутренним отражением*, а угол $\theta_к$ — критическим.

Для углов $\theta_1 > \theta_к$ косинус угла преломления — мнимый:

$$\cos\theta_2 = \sqrt{1 - \sin^2\theta_2} = \pm j\sqrt{[(c_2/c_1)\sin\theta_1]^2 - 1}.$$

Нормальная компонента волнового вектора преломленной волны $k_{2x} = a_2 = k_2\cos\theta$ — также мнимое число. Обозначим его в виде

$$a_2 \pm j\alpha = \pm k_2\sqrt{[(c_2/c_1)\sin\theta_1]^2 - 1}.$$

Тогда косинус мнимого угла

$$\cos\theta_2 = a_2/k_2 = \pm j\alpha/k_2.$$

Относительные амплитуды отраженной и преломленной волн при закритических углах определяются формулами:

$$\frac{A_1'}{A_1} = \frac{\rho_2/\rho_1 \pm j\alpha/a_1}{\rho_2/\rho_1 \mp j\alpha/a_1} = e^{j2\psi},$$

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{2}{\rho_2/\rho_1 \pm j\alpha/a_1} = \frac{2}{\sqrt{(\rho_2/\rho_1)^2 + (\alpha/a_1)^2}}\,e^{j\psi}, \qquad \text{(VII.3.2)}$$

где $\operatorname{tg}\psi = \alpha\rho_1/(\alpha_1\rho_2)$.

В первой среде суммарная волна состоит из падающей и отраженной:

$$\varphi_1 = A_1\left(e^{j(\omega t - a_1x - b_1y)} + e^{j(\omega t + a_1x - b_1y + 2\psi)}\right).$$

Волна во второй среде

$$\varphi_2 = \frac{2A}{\sqrt{(\rho_2/\rho_1)^2 + (\alpha/a_1)^2}} e^{\mp \alpha x} e^{j(\omega t - by + \psi)}. \qquad \text{(VII.3.3)}$$

Сохраняя в показателе только знак «—», имеем (VII.3.3) — уравнение бегущей волны вдоль возрастающих значений y. Амплитуда этой волны изменяется по закону $e^{-\alpha x}$. Степень убывания амплитуды определяется величиной α, которую можно преобразовать к виду

$$\alpha = \frac{2\pi}{\lambda_1} \sqrt{\sin^2\theta - (\lambda_1/\lambda_2)^2}. \qquad \text{(VII.3.4)}$$

При критическом угле ($\sin\theta_{кр} = c_1/c_2$) $\alpha = 0$. Иначе говоря, амплитуда вдоль фронта волны затухать не будет, возникает плоская волна, бегущая вдоль границы раздела.

Если угол будет больше критического, т. е. $\sin\theta \geqslant c_1/c_2$, то $\alpha > 0$ и амплитуда быстро уменьшается с увеличением расстояния от границы раздела. При $\theta_1 = \pi/2$ значение α достигает максимума, равного

$$\alpha_0 = \frac{2\pi}{\lambda_1} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^2}.$$

Когда $\arcsin(c_1/c_2) < \theta_1 < \pi/2$, то α лежит в пределах между 0 и α_0. Допустим, что плоская волна падает из воздуха в воду под углом, равным критическому. В этом случае

$$c_1/c_2 = 0{,}23; \quad \alpha_0 = (2\pi/\lambda)(1 - 0{,}027) \approx 2\pi/\lambda.$$

Это значит, что на глубине $\lambda/2\pi$ амплитуда колебаний давления в воде в e раз меньше, чем на границе раздела.

Скорость распространения во второй среде определяется из условия постоянства фазы волны (VII.3.3):

$$\omega t - by = \text{const},$$

$$\frac{d}{dt}(\omega t - by) = 0, \quad \omega - b\frac{dy}{dt} = \omega - bc_n = 0,$$

$$|c_n| = \frac{\omega}{b} = \frac{\omega}{k_1 \sin\theta_1} = \frac{c_1}{\sin\theta_1} = \frac{c_2}{\sin\theta_2}, \quad \theta_{кр} < \theta_1 \leqslant \frac{\pi}{2},$$

при

$$\theta_1 \approx \frac{\pi}{2}; \quad \alpha = k_1 \sqrt{1 - \left(\frac{c_1}{c_2}\right)^2}, \quad c_n = \frac{c_1}{\sin\pi/2} = c_1.$$

Таким образом, если угол падения $\theta_{кр}$, то коэффициент ослабления пограничной волны равен нулю, а скорость распространения волнового следа вдоль границы раздела $c_2 = c_1/\sin\theta_{кр}$. Если угол падения близок к 90°, то вдоль границы раздела будет распространяться волна со скоростью, близкой к скорости в первой среде, при этом коэффициент ослабления по фронту волны наибольший и равен $k_1\sqrt{1 - (c_1/c_2)^2}$.

Зная потенциал скорости во второй среде при углах падения, бо́льших критического, можно вычислить давление и компоненты колебательной скорости по осям X и Y. Для звукового давления

$$p_2 = j\omega\rho_2\varphi_2. \qquad \text{(VII.3.5)}$$

Для колебательной скорости

$$\dot{\xi} = -\partial\varphi_2/\partial x = \alpha\varphi_2, \quad \dot{\eta} = -\partial\varphi_2/\partial y = b\varphi_2 e^{-j\pi/2}. \qquad \text{(VII.3.6)}$$

Таким образом, звуковое давление во второй среде пропорционально потенциалу скорости φ_2. Компоненты скорости также пропорциональны потенциалу φ_2, но фазы компонент скорости не совпадают, а отличаются на 90°. Известно, что в случае сложения взаимно перпендикулярных колебательных движений с разностью фаз 90° возникает движение по эллипсу. Таким образом, в условиях полного внутреннего отражения составляющие скорости движения $\dot{\xi}$ и $\dot{\eta}$ частиц сдвинуты по фазе на 90° и частицы, находящиеся во второй среде вблизи границы раздела, движутся по эллипсам. Плоскость этих эллипсов совпадает с плоскостью падения. Отношение диаметров эллипсов зависит от угла падения и определяется формулой

$$\frac{\alpha}{b} = \frac{(\omega/c_1)\sqrt{\sin^2\theta - (c_1/c_2)^2}}{(\omega/c_1)\sin\theta_1} = \frac{1}{\sin\theta_1}\sqrt{\sin^2\theta_1 - (c_1/c_2)^2}. \qquad \text{(VII.3.7)}$$

При угле падения, равном критическому, $\alpha/b = 0$ и волновой след представляет собой чисто продольную волну, распространяющуюся вдоль границы раздела. Наоборот, при угле падения, близком к 90°, отношение диаметров эллипсов достигает наибольшего значения и определяется формулой

$$\frac{\alpha}{b} = \sqrt{1 - \left(\frac{c_1}{c_2}\right)^2}.$$

§ VII.4. ПРОХОЖДЕНИЕ ЗВУКА ЧЕРЕЗ ПЛОСКИЙ СЛОЙ

Строгое решение задачи о прохождении звука через плоский слой сводят к решению волнового уравнения для различных сред *1—3* (рис. VII.4.1) при граничных условиях обычного типа. Волновые уравнения для этих сред имеют вид

$$\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial t^2} - \frac{1}{\rho_i\beta_{si}} \cdot \frac{\partial^2\varphi_i}{\partial x_k^2} = 0 \qquad \text{(VII.4.1)}$$

$$(i = 1,\ 2,\ 3;\ x_1 = x;\ x_2 = y),$$

причем решения должны удовлетворять граничным условиям

$$\rho_1 \frac{\partial\varphi_1}{\partial t}\bigg|_{x=0} = \rho_2 \frac{\partial\varphi_2}{\partial t}\bigg|_{x=0}, \quad \rho_2 \frac{\partial\varphi_2}{\partial t}\bigg|_{x=d} = \rho_3 \frac{\partial\varphi_3}{\partial t}\bigg|_{x=d},$$
$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\bigg|_{x=0} = \frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\bigg|_{x=0}, \quad \frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\bigg|_{x=d} = \frac{\partial\varphi_3}{\partial x}\bigg|_{x=d}. \qquad \text{(VII.4.2)}$$

Решениями этих уравнений будут волновые функции для трех сред:

$$\varphi_1 = A_1 e^{j(\omega t - a_1x + b_1y)} + A_1' e^{j(\omega t + a_1x + b_1y)},$$
$$\varphi_2 = A_2 e^{j(\omega t - a_2x + b_2y)} + A_2' e^{j(\omega t + a_2x + b_2y)},$$
$$\varphi_3 = A_3 e^{j(\omega t - a_3x + b_3y)}. \qquad \text{(VII.4.3)}$$