

колебательной скорости по осям X и Y . Для звукового давления

$$p_2 = j\omega\rho_2\varphi_2. \quad (\text{VII.3.5})$$

Для колебательной скорости

$$\dot{\xi} = -\partial\varphi_2/\partial x = \alpha\varphi_2, \quad \dot{\eta} = -\partial\varphi_2/\partial y = b\varphi_2 e^{-j\pi/2}. \quad (\text{VII.3.6})$$

Таким образом, звуковое давление во второй среде пропорционально потенциалу скорости φ_2 . Компоненты скорости также пропорциональны потенциалу φ_2 , но фазы компонент скорости не совпадают, а отличаются на 90° . Известно, что в случае сложения взаимно перпендикулярных колебательных движений с разностью фаз 90° возникает движение по эллипсу. Таким образом, в условиях полного внутреннего отражения составляющие скорости движения $\dot{\xi}$ и $\dot{\eta}$ частиц сдвинуты по фазе на 90° и частицы, находящиеся во второй среде вблизи границы раздела, движутся по эллипсам. Плоскость этих эллипсов совпадает с плоскостью падения. Отношение диаметров эллипсов зависит от угла падения и определяется формулой

$$\frac{\alpha}{b} = \frac{(\omega/c_1) \sqrt{\sin^2\theta - (c_1/c_2)^2}}{(\omega/c_1) \sin\theta_1} = \frac{1}{\sin\theta_1} \sqrt{\sin^2\theta_1 - (c_1/c_2)^2}. \quad (\text{VII.3.7})$$

При угле падения, равном критическому, $\alpha/b = 0$ и волновой след представляет собой чисто продольную волну, распространяющуюся вдоль границы раздела. Наоборот, при угле падения, близком к 90° , отношение диаметров эллипсов достигает наибольшего значения и определяется формулой

$$\frac{\alpha}{b} = \sqrt{1 - \left(\frac{c_1}{c_2}\right)^2}.$$

§ VII.4. ПРОХОЖДЕНИЕ ЗВУКА ЧЕРЕЗ ПЛОСКИЙ СЛОЙ

Строгое решение задачи о прохождении звука через плоский слой сводят к решению волнового уравнения для различных сред $I-3$ (рис. VII.4.1) при граничных условиях обычного типа. Волновые уравнения для этих сред имеют вид

$$\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial t^2} - \frac{1}{\rho_i\beta_{si}} \cdot \frac{\partial^2\varphi_i}{\partial x_k^2} = 0 \quad (\text{VII.4.1})$$

$$(i = 1, 2, 3; x_1 = x; x_2 = y),$$

причем решения должны удовлетворять граничным условиям

$$\begin{aligned} \rho_1 \frac{\partial\varphi_1}{\partial t} \Big|_{x=0} &= \rho_2 \frac{\partial\varphi_2}{\partial t} \Big|_{x=0}, & \rho_2 \frac{\partial\varphi_2}{\partial t} \Big|_{x=d} &= \rho_3 \frac{\partial\varphi_3}{\partial t} \Big|_{x=d}, \\ \frac{\partial\varphi_1}{\partial x} \Big|_{x=0} &= \frac{\partial\varphi_2}{\partial x} \Big|_{x=0}, & \frac{\partial\varphi_2}{\partial x} \Big|_{x=d} &= \frac{\partial\varphi_3}{\partial x} \Big|_{x=d}. \end{aligned} \quad (\text{VII.4.2})$$

Решениями этих уравнений будут волновые функции для трех сред:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= A_1 e^{j(\omega t - a_1 x + b_1 y)} + A'_1 e^{j(\omega t + a_1 x + b_1 y)}, \\ \varphi_2 &= A_2 e^{j(\omega t - a_2 x + b_2 y)} + A'_2 e^{j(\omega t + a_2 x + b_2 y)}, \\ \varphi_3 &= A_3 e^{j(\omega t - a_3 x + b_3 y)}. \end{aligned} \quad (\text{VII.4.3})$$

Применяя к этим решениям граничные условия и решая систему уравнений, находят коэффициенты отражения и прозрачности слоя:

$$r_p = \frac{A'_1}{A_1} = \frac{\delta^{-1} - \delta}{\sqrt{(\delta^{-1} + \delta)^2 + 4 \operatorname{ctg}^2 a_2 d}}, \quad (\text{VII.4.4})$$

$$t_p = \frac{A_3}{A_1} = \frac{2}{\sqrt{4 \cos^2 a_2 d + (\delta^{-1} + \delta)^2 \sin^2 a_2 d}}, \quad (\text{VII.4.5})$$

где

$$\delta = \frac{a_1 \rho_2}{a_2 \rho_1} = \frac{\rho_2 / \operatorname{ctg} \theta_2}{\rho_1 / \operatorname{ctg} \theta_1}, \quad a_1 = k_1 \cos \theta_1, \quad a_2 = k_2 \cos \theta_2.$$

Формулы прозрачности и отражения позволяют сделать следующие выводы:

1. Коэффициент отражения равен нулю в двух случаях:

а) $\delta^{-1} - \delta = 0$ или $\rho_1 / \rho_2 = \operatorname{ctg} \theta_1 / \operatorname{ctg} \theta_2$, что преобразуется к виду

$$\sin \theta_1 = \sqrt{\frac{(1/\varepsilon)^2 - 1}{(\rho_1 / \rho_2)^2 - 1}}, \quad \varepsilon = \rho_2 c_2 / (\rho_1 c_1), \quad (\text{VII.4.6})$$

б) $\operatorname{ctg} a_2 d \rightarrow \infty$, при этом коэффициент отражения также равен нулю. Это произойдет, если $a_2 d = n\pi$, т. е. при толщинах слоя

$$d_n = n\lambda_2 / 2 \cos \theta_2 \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (\text{VII.4.7})$$

Если $\theta_2 = 0$, то слой совершенно не отражает, когда его толщина кратна половине волны.

Однако при другом угле преломления и другой толщине слой оказывается прозрачным. Например, если $\theta_2 = 30^\circ$, то

$$d_1 = \frac{\lambda_2}{2\sqrt{3/2}} = \frac{\lambda_2}{\sqrt{3}},$$

т. е. слой прозрачен при толщине, кратной $\lambda_2 / \sqrt{3}$.

2. Для очень тонкого слоя формула коэффициента отражения упрощается. При условии

$$a_2 d \ll 1, \quad d \frac{2\pi}{\lambda_2} \cos \theta_2 \ll 1$$

можно пользоваться следующей формулой:

$$r_p = \frac{a_2 d}{2} (\delta^{-1} - \delta) = \frac{\omega d \cos \theta_2}{2c_2} (\delta^{-1} - \delta). \quad (\text{VII.4.8})$$

Этот результат показывает, что коэффициент отражения от тонкого слоя $d/\lambda_2 \ll 1$ пропорционален частоте звуковой волны.

3. При углах падения больших, чем критический, на слое может и не произойти полного внутреннего отражения. При угле большем, чем критический, волны, бегущие параллельно передней границе раздела (при малом значении толщины d), могут возбуждать колебания на противоположной границе. Это может служить причиной возникновения волн в среде, находящейся за пластиной.

Интересные результаты получаются для частного случая — нормального падения волны. Формулы (VII.4.4) и (VII.4.5) при $\theta_1 = 0$ принимают вид:

$$r_p = \frac{\dot{R}_1/R_2 - R_2/R_1}{\sqrt{(R_1/R_2 + R_2/R_1)^2 + 4 \operatorname{ctg} k_2 d}}, \quad (\text{VII.4.9})$$

$$t_p = \frac{1}{\sqrt{(R_1/R_2 + R_2/R_1)^2 (\sin k_2 d/2)^2 + \cos^2 k_2 d}}. \quad (\text{VII.4.10})$$

В гидроакустике часто приходится решать задачу о прозрачности пластин. При этом наиболее важным является случай тонкой пластины, сделанной из акустически более жесткого материала, чем морская

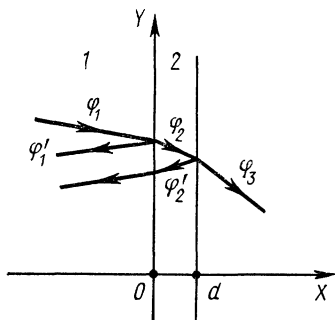


Рис. VII.4.1

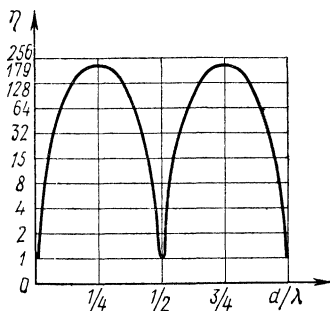


Рис. VII.4.2

вода. Это соответствует тому, что в формуле для коэффициента прозрачности надо принять $R_2 \gg R_1$ и $R_2 d \ll 1$, а

$$t_p = \frac{1}{\sqrt{(R_2/R_1)^2 (k_2 d/2)^2 + 1}}. \quad (\text{VII.4.11})$$

Так как $R_2 k_2 d = \rho_2 c_2 k_2 d = \rho_2 d \omega$, то, обозначая $\rho_2 d = M_2$ — массу слоя единицы площади пластины, получаем

$$\frac{1}{t_p} = \sqrt{1 + \left(\frac{M_2 \omega}{2R_1}\right)^2}. \quad (\text{VII.4.12})$$

Отношение интенсивности падающей волны к интенсивности прошедшей называют коэффициентом звукоизоляции. Для плоского тонкого слоя он равен

$$\eta = \frac{1}{t_p^2} \approx 1 + \left(\frac{\omega M_2}{2R_1}\right)^2 = 1 + \left(\frac{\pi M_2 f}{R_1}\right)^2. \quad (\text{VII.4.13})$$

Коэффициент звукоизоляции эквивалентен отношению полной мощности в последовательной цепи к мощности потерь на сопротивлении $2R_1$.

Для пластин, употребляемых в обтекателях, при заданной частоте выгодно брать материал меньшей плотности.

В качестве примера сделаем числовой расчет коэффициента звукоизоляции стальной пластины толщиной $d = 1$ см, погруженной в воду.

Отношение волновых сопротивлений стали R_2 и воды R_1

$$R_2/R_1 = 27. \quad (\text{VII.4.14})$$

Для вычисления коэффициента прозрачности η воспользуемся (VII.4.10) и получим

$$\eta = \frac{1}{t_p^2} \approx \left(\frac{R_2}{2R_1} \right)^2 \sin^2 k_2 d + \cos^2 k_2 d \approx 182 \sin^2 (1,25 \cdot 10^{-5} f) + \cos^2 (1,25 \cdot 10^{-5} f).$$

При частоте $f < 2$ кГц $\eta = 1$, т. е. интенсивности прошедшей и падающей волн одинаковы; при $f = 126$ кГц и $k_2 d = \pi/2$ $\eta_{\text{макс}} = 126$.

На рис. VII.4.2 показано изменение звукоизоляции слоя толщиной d от частоты.

Для слоя из воздуха или губчатой резины ($R_2 = 40$), находящейся в воде, $R_1/2R_2 = 1,88 \cdot 10^4$. Отсюда получаем следующий коэффициент звукоизоляции:

$$\eta = \frac{1}{t_p^2} = 3,53 \cdot 10^8 \sin^2 k_2 d + \cos^2 k_2 d.$$

Минимумы и максимумы звукоизоляции возникают при тех же значениях d/λ_2 , что и для стали, но максимум составляет очень большое число $(1,88 \cdot 10^4)^2 = 3,53 \cdot 10^8$, т. е. такой слой будет практически совершенным изолятором.

ЛИТЕРАТУРА

- [1]. Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний. М., 1958.
- [2]. Бабакон И. М. Теория колебаний. М., 1965.
- [3]. Стрелков С. П. Введение в теорию колебаний. М., 1965.
- [4]. Мандельштам Л. И. Лекции по теории колебаний. М., 1972.
- [5]. Яблонский А. А., Норейко С. С. Курс теории колебаний. М., 1975.
- [6]. Лосев А. К. Линейные радиотехнические цепи. М., 1971.
- [7]. Ключкин И. И. Борьба с шумом и звуковой вибрацией на судах. Л., 1971.
- [8]. Скучек Е. Простые и сложные колебательные системы. М., 1971.
- [9]. Харкевич А. А. Теория электроакустических преобразователей. Волновые процессы. М., 1973.
- [10]. Стретт Дж. В. (лорд Релей). Теория звука. М., 1955.—Т. I.
- [11]. Лепендин Л. Ф. Методическое пособие по курсу акустики. Таганрог, 1967. (Изд. ТРТИ).
- [12]. Исакович М. А. Общая акустика. М., 1973.
- [13]. Ржевкин С. Н. Курс лекций по теории звука. М., 1960.
- [14]. Михайлов И. Г., Соловьев В. А., Сырников Ю. П. Основы молекулярной акустики. М., 1964.
- [15]. Ноздрев В. Ф., Федорищенко Н. В. Молекулярная акустика. М., 1974.
- [16]. Бреховских Л. М. Волны в слоистых средах. М., 1973.
- [17]. Скучек Е. Основы акустики. М., 1976.—Т. I.