ЧАСТЬ II

ГЛАВА I
ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ИЗЛУЧЕНИЯ. СФЕРИЧЕСКИЕ ИЗЛУЧАТЕЛИ

§ I.1. АНАЛИЗ УСЛОВИЙ ИЗЛУЧЕНИЯ УПРУГИХ ВОЛН

Постановка задачи. Рассмотрим закономерности излучения упругих волн, возникающих в результате периодического изменения объема однородного тела в жидкости. Пусть объем тела выражается периодической функцией времени так, что скорость смещения всех участков поверхности направлена по нормали, построенной в соответствующей точке поверхности, и определяется периодической функцией $v(t)$. Под действием движения поверхности в жидкости возникнут периодические сжатия и разряжения, которые будут распространяться в виде упругих волн. Будем считать, что поверхность совершает малые колебания. В этом случае задача об излучении упругих волн сводится к решению волнового уравнения относительно потенциала скорости:

$$\Delta\Psi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} = 0. \qquad (\mathrm{I.1.1})$$

При этом необходимо найти решения волнового уравнения, которые удовлетворяют граничному условию на поверхности колеблющегося тела

$$\frac{\partial\Psi}{\partial n} = -v(t) \qquad (\mathrm{I.1.2})$$

и условию излучения $\Psi_{r\to\infty} \to 0$.

Найдем полную мощность упругих волн в двух крайних случаях: при низких частотах, когда волновые размеры колеблющегося тела ($2\pi l/\lambda = \omega l/c \ll 1$) значительно меньше единицы, и в случае высоких частот, когда $\omega l/c \gg 1$.

Излучение низких частот. Исследуем случай, когда длина волны значительно больше размеров тела. Сначала найдем потенциал поля Ψ в области пространства, расположенной вблизи поверхности тела, т. е. на расстоянии большем, чем его линейные размеры, и в то же время меньшем, чем длина волны ($l \leqslant r \ll \lambda$). В указанной области пространства потенциал скорости мало изменяет свое численное значение при изменении расстояния δr на величину, имеющую порядок линейного размера тела l. Поэтому величина $\Delta\Psi$, входящая в волновое уравнение (I.1.1) и выражающая вторую производную от функции Ψ по расстоянию r, имеет значение Ψ/l^2. Что касается второй величины, входящей в то же уравнение, то она может быть определена как $\frac{1}{c^2}\cdot\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}\sim\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2\Psi$. В связи с этим в условиях излучения низких частот в области $l\leqslant r\ll\lambda$, расположенной на расстояниях значительно меньших, чем длина волны, вторым членом в волновом уравнении можно пренебречь:

$$\frac{1}{c^2}\cdot\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}(\Delta\Psi)^{-1}\sim 4\pi^2\frac{l^2}{\lambda^2}\ll 1;\ \Delta\Psi=0. \tag{I.1.3}$$

Таким образом, при излучении низких частот на расстояниях r, определяемых условием $r\ll\lambda$, движение жидкости подчиняется уравнению Лапласа и жидкость можно считать несжимаемой. На расстояниях, имеющих порядок величины линейных размеров тела, решение уравнения Лапласа не может быть записано в общем виде. Оно зависит от формы колеблющегося тела. Только на расстояниях, достаточно больших по сравнению с размерами тела, в жидкости устанавливается равномерное и симметричное распределение скорости движения.

Если провести вокруг тела сферическую поверхность радиусом r_0, то скорость движения жидкости в каждой точке этой поверхности равна некоторой функции времени и имеет направление, совпадающее с направлением радиуса сферы. В этом случае для области пространства, лежащей между r_0 и $r\ll\lambda$, можно записать решение уравнения Лапласа в виде произведения функции от координаты r и функции времени t: $\Psi=\psi(r)f(t)$. Функция $\psi(r)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\psi}{ds}\right)=0. \tag{I.1.4}$$

После интегрирования этого уравнения получим:

$$\psi(r)=\frac{C_1}{r}+C_2,\ \Psi(r,t)=\frac{C_1f(t)}{r}+C_2f(t), \tag{I.1.5}$$

где постоянные интегрирования C_1 находят из условия $\left.\frac{\partial\Psi}{\partial r}\right|_{r=r_0}=-vf(t)$; скорость течения жидкости $vf(t)$ через сферическую поверхность радиусом r_0 определяют тем, что объем жидкости, протекающей через поверхность сферы, ввиду несжимаемости жидкости равен количеству жидкости, выталкиваемой телом за единицу времени, т. е. скорости изменения объема тела dV/dt.

Отсюда следует, что линейная скорость жидкости, протекающей через поверхность сферы, равна

$$vf(t)=\frac{dV/dt}{4\pi r^2}$$

и постоянная C_1 может быть вычислена в формуле

$$-\frac{dV/dt}{4\pi r_0^2}=\left.\frac{\partial\Psi}{\partial r}\right|_{r=r_0}=-\frac{C_1f(t)}{r_0^2},\quad C_1f(t)=\frac{\dot V}{4\pi}.$$

В результате потенциал скорости вблизи поверхности колеблющегося тела выражают следующей формулой:

$$\Psi(r,\ t) = \dot{V}(t)/(4\pi r) + C_2 f(t). \qquad (I.1.6)$$

На больших расстояниях от тела решение должно удовлетворять не уравнению Лапласа, а волновому уравнению (I.1.1) и представляет собой расходящуюся волну, т. е. должно выражаться функцией

$$\Psi(r,\ t)_{r \gg \lambda} = \dot{V}(t - r/c)/(4\pi r) + C_2(t) = \frac{1}{4\pi r} Q(t - r/c) + C_2(t). \qquad (I.1.7)$$

Для нахождения колебательной скорости в дальней зоне по формуле (I.1.7) найдем производную: $-\partial\Psi/\partial n = v_n(r,\ t)$. При дифференцировании можно брать производную только числителя, так как производная от λ/r дает на расстоянии $r \gg \lambda$ член второго порядка малости. Выполняя операцию дифференцирования, получаем

$$v_n(r,\ t) = \frac{1}{4\pi c r} \dot{Q}\left(t - \frac{r}{c}\right),$$

где $Q = \ddot{V}$ — объемное ускорение.

Звуковое давление определяют формулой

$$p = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \rho c \frac{\dot{Q}(t - r/c)}{4\pi r c}.$$

Полная мощность излучения равна

$$\mathscr{P} = \oint_S v_n p\, dS = \frac{\rho c}{16\pi^2 c^2} \oint \frac{\dot{Q}^2(t - r/c)}{r^2}\, dS.$$

Интегрирование проводят по поверхности сферы. Этот результат показывает, что для низких частот полная мощность излучения пропорциональна квадрату объемного ускорения. Объемное ускорение при гармонических колебаниях пропорционально амплитуде смещения и квадрату частоты. Таким образом, полная мощность излучения длинных волн пропорциональна четвертой степени частоты: $\mathscr{P}_{\lambda \gg l} \sim \omega^4$.

Излучение высоких частот. Исследуем закономерности излучения, когда длина звуковой волны значительно меньше линейных размеров тела. С этой целью разделим всю поверхность излучателя на квазиплоские элементарные площадки, линейные размеры которых больше длины волны. Каждая такая площадка будет излучать плоскую звуковую волну. Мощность, излучаемая элементарной площадкой, равна $\rho c v_n^2\, dS/2$. Полная мощность определяется интегралом по всей поверхности излучателя:

$$\mathscr{P}_{\lambda \ll l} \approx \frac{1}{2} \rho c \oint_S v_n^2\, ds, \qquad (I.1.8)$$

где v_n — амплитуда скорости колебания.

Значение скорости v_n пропорционально частоте и амплитуде смещения, поэтому мощность излучения при высоких частотах [см. (I.1.8)] пропорциональна квадрату частоты.

Как показывает анализ, зависимость полной мощности излучения от частоты для низких и высоких частот различна: при низких частотах мощность пропорциональна четвертой степени частоты, а при высоких — второй степени. Если сравнить акустическую мощность излучения для высоких и низких частот при условии, когда амплитуды колебания одинаковы, то отношение этих мощностей обратно пропорционально четвертой степени низкой частоты.

Таким образом, излучение на низких частотах малоэффективно. Это объясняют тем, что на низких частотах слой жидкости, расположенной у поверхности излучателя, где жидкость можно считать несжимаемой [см. (I.1.3)], по своей массе может быть значительно больше массы жидкости, вытесненной излучателем, и, как это будет показано в § I.2, присоединенная масса аккумулирует в форме кинетической энергии движения значительную часть энергии колебаний излучателя, так что волновому полю передается только небольшая часть энергии колебаний.

§ I.2. ХАРАКТЕРИСТИКИ ИЗЛУЧАТЕЛЕЙ

Сила реакции акустического поля. Для того чтобы определить эффективность излучения, найдем работу, которую совершает источник упругих волн против сил реакции внешней упругой среды.

Пусть элемент поверхности df имеет нормальную составляющую колебательной скорости $v_n \cos \omega t$ и испытывает давление со стороны акустического поля $p = p_m \cos(\omega t + \varphi)$, направленное в сторону, противоположную нормали поверхности в точке df. Работа, совершаемая при движении всей поверхностью излучателя против сил акустического поля за время dt, равна

$$dA = -dt \oint_f v_n p_m \cos \omega t \cos(\omega t + \varphi)\, df. \qquad \text{(I.2.1)}$$

Выберем точку в пространстве, к которой приводится результирующая сил давления, — точку приведения этих сил. Обозначим скорость движения этой точки v_0. Скорость движения в любой точке поверхности излучателя выразим с помощью отношения $\mathbf{v}_n/v_0 = \mathbf{D}_n$. Если в качестве точки приведения окажется точка, имеющая максимальную амплитуду скорости, то безразмерный вектор $\mathbf{D}_n$ по модулю равен или меньше единицы и имеет для каждого элемента поверхности направление, совпадающее с направлением нормали. Используя вектор $\mathbf{D}_n$, запишем выражение (I.2.1) в виде

$$dA = -v_0 \cos \omega t\, dt \oint_f p_m \mathbf{D}_n \cos(\omega t + \varphi)\, df. \qquad \text{(I.2.2)}$$

Проведя простые преобразования, получим:

$$\begin{gathered} dA = v_0 \cos \omega t R \cos(\omega t + \alpha)\, dt, \\ R = \sqrt{\left(\oint_f p_m \mathbf{D}_n \cos \varphi\, df\right)^2 + \left(\oint_f p_m \mathbf{D} \sin \varphi df\right)^2}, \\ \alpha = \operatorname{arctg} \left(\oint_f p_m \mathbf{D}_n \sin \varphi\, df\right) / \left(\oint_f p_m \mathbf{D} \cos \varphi\, df\right), \end{gathered} \qquad \text{(I.2.3)}$$