Как показывает анализ, зависимость полной мощности излучения от частоты для низких и высоких частот различна: при низких частотах мощность пропорциональна четвертой степени частоты, а при высоких — второй степени. Если сравнить акустическую мощность излучения для высоких и низких частот при условии, когда амплитуды колебания одинаковы, то отношение этих мощностей обратно пропорционально четвертой степени низкой частоты.

Таким образом, излучение на низких частотах малоэффективно. Это объясняют тем, что на низких частотах слой жидкости, расположенной у поверхности излучателя, где жидкость можно считать несжимаемой [см. (I.1.3)], по своей массе может быть значительно больше массы жидкости, вытесненной излучателем, и, как это будет показано в § I.2, присоединенная масса аккумулирует в форме кинетической энергии движения значительную часть энергии колебаний излучателя, так что волновому полю передается только небольшая часть энергии колебаний.

§ I.2. ХАРАКТЕРИСТИКИ ИЗЛУЧАТЕЛЕЙ

Сила реакции акустического поля. Для того чтобы определить эффективность излучения, найдем работу, которую совершает источник упругих волн против сил реакции внешней упругой среды.

Пусть элемент поверхности df имеет нормальную составляющую колебательной скорости $v_n \cos \omega t$ и испытывает давление со стороны акустического поля $p = p_m \cos(\omega t + \varphi)$, направленное в сторону, противоположную нормали поверхности в точке df. Работа, совершаемая при движении всей поверхностью излучателя против сил акустического поля за время dt, равна

$$dA = -dt \oint_f v_n p_m \cos \omega t \cos(\omega t + \varphi)\, df. \tag{I.2.1}$$

Выберем точку в пространстве, к которой приводится результирующая сил давления, — точку приведения этих сил. Обозначим скорость движения этой точки v_0. Скорость движения в любой точке поверхности излучателя выразим с помощью отношения $\mathbf{v}_n/v_0 = \mathbf{D}_n$. Если в качестве точки приведения окажется точка, имеющая максимальную амплитуду скорости, то безразмерный вектор $\mathbf{D}_n$ по модулю равен или меньше единицы и имеет для каждого элемента поверхности направление, совпадающее с направлением нормали. Используя вектор $\mathbf{D}_n$, запишем выражение (I.2.1) в виде

$$dA = -v_0 \cos \omega t\, dt \oint_f p_m \mathbf{D}_n \cos(\omega t + \varphi)\, df. \tag{I.2.2}$$

Проведя простые преобразования, получим:

$$\begin{gathered} dA = v_0 \cos \omega t R \cos(\omega t + \alpha)\, dt, \\ R = \sqrt{\left(\oint_f p_m \mathbf{D}_n \cos \varphi\, df\right)^2 + \left(\oint_f p_m \mathbf{D} \sin \varphi df\right)^2}, \\ \alpha = \operatorname{arctg} \left(\oint_f p_m \mathbf{D}_n \sin \varphi\, df\right) / \left(\oint_f p_m \mathbf{D} \cos \varphi\, df\right), \end{gathered} \tag{I.2.3}$$

где $R\cos(\omega t+\alpha)$ имеет размерность силы и представляет собой интегральную силу реакции поля на поверхность излучателя. Частота реакции поля совпадает с частотой скорости колебаний точки приведения $v_0\cos\omega t$, но отличается по фазе на угол α.

Для облегчения дальнейших преобразований формул перейдем от тригонометрических функций к комплексным. Выразим силу реакции поля посредством комплексной функции

$$\tilde{R}=\tilde{F}e^{j\omega t}, \tag{I.2.4}$$

где $\tilde{F}=Fe^{j\alpha}=\sqrt{R_1^2+R_2^2}e^{j\alpha}$ — комплексная амплитуда силы реакции поля; $R_1=\oint_f p_m\,\mathbf{D}_n\cos\varphi\,df$; $R_2=\oint_f p_m\,\mathbf{D}_n\sin\varphi\,df$; $\alpha=\operatorname{arctg}\frac{R_1}{R_2}$, и запишем $\tilde{F}$ в виде комплексной функции:

$$\tilde{F}=R_1+jR_2. \tag{I.2.5}$$

Таким образом, сила реакции поля содержит две составляющие: косинусную и синусную. Первая образует действительную часть комплексного выражения силы реакции поля; вторая — мнимую часть. Дальнейший анализ свойств излучения проведем, используя понятие об импедансе излучателя.

Механический импеданс есть отношение силы реакции поля излучения, действующей на поверхность излучателя, к амплитуде скорости v_0 точки приведения.

В общем виде механический импеданс излучателя выражают формулой

$$z=\frac{F}{v_0}=\frac{1}{v_0}\oint p_m\,\mathbf{D}_n e^{j\varphi}\,df=$$

$$=\frac{1}{v_0}\left(\oint p_m\,\mathbf{D}_n\cos\varphi\,df+j\oint p_m\,\mathbf{D}_n\sin\varphi\,df\right)=X+jY,$$

т. е. является комплексным числом. Обозначая действительную и мнимую части механического импеданса излучателя соответственно

$$X=\frac{1}{v_0}\oint_S p_m\,\mathbf{D}_n\cos\varphi\,df,$$
$$Y=\frac{1}{v_0}\oint_S p_m\,\mathbf{D}_n\sin\varphi\,df, \tag{I.2.6}$$

запишем импеданс в виде формулы

$$\tilde{z}=X+jY. \tag{I.2.7}$$

Используя выражения (I.2.6), получим выражения для косинусной и синусной частей силы реакции поля:

$$R_1=\oint_f p_m\,\mathbf{D}_n\cos\varphi\,df=v_0X,$$
$$R_2=\oint_f p_m\,\mathbf{D}_n\sin\varphi\,df=v_0Y. \tag{I.2.8}$$

Найдем выражение для работы dA по формуле (I.2.2) в следующем виде:

$$\begin{aligned} dA &= -v_0 \cos \omega t \left[\oint p_m \mathbf{D}_n \cos(\omega t + \varphi)\, df \right] dt = \\ &= \left[-v_0 R_1 \cos^2 \omega t + v_0 R_2 \sin \omega t \cos \omega t \right] dt = \\ &= (-X v_0^2 \cos^2 \omega t + Y v_0^2 \cos \omega t \sin \omega t)\, dt. \end{aligned} \tag{1.2.9}$$

Мощность, выделяемая преобразователем против сил реакции поля, равна

$$dA/dt = -X v_0^2 \cos^2 \omega t + Y v_0^2 \cos \omega t \sin \omega t$$

и состоит из мощности, образованной за счет косинусной части реакции поля, или, что то же самое, за счет действительной части механического импеданса, и мощности, выделяемой в результате действия синусной части реакции поля, или мнимой части механического импеданса. Как первая, так и вторая составляющие мгновенной мощности излучателя — квадратичные периодические функции времени (рис. I.2.1). На рисунке наглядно показано, что мощность, соответствующая косинусной составляющей силы реакции (кривая *1*), не меняет своего знака за период и только проходит дважды через значение, равное нулю. Что касается мощности, соответствующей синусной составляющей мощности поля (кривая *2*), то характер ее изменения с течением времени иной. Мощность, выделяемая излучателем против синусной составляющей силы реакции поля (или в результате действия мнимой части импеданса), может быть как положительной, так и отрицательной. В первую $^1/_4$ периода (кривые *3*, *4*) мощность положительна и идет на пополнение энергии источника излучения. При $t = T/4$ она изменяет знак. Это соответствует тому, что излучатель сообщает жидкости некоторую энергию. Средняя мощность, затрачиваемая источником за период, равна интегралу от dA [см. (I.2.9)] в пределах от 0 до T, деленному на период T.

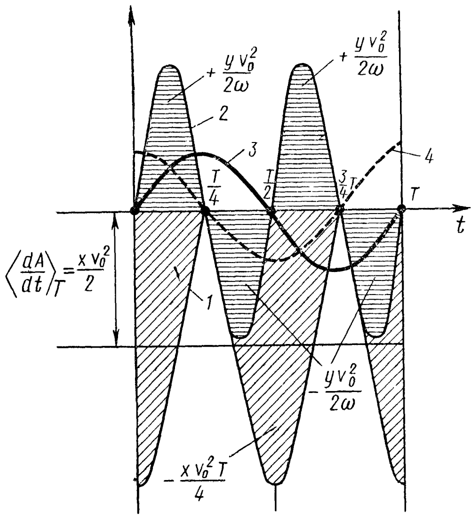

Рис. I.2.1

Вычислим работу излучателя за один период колебаний, причем все время от 0 до T разобьем на 4 части. При вычислении используем табличные интегралы:

$$\int \cos^2 x\, dx = \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{2} x,$$

$$\int \cos x \sin x\, dx = \frac{1}{2} \sin^2 x,$$

Производя интегрирование (I.2.9), найдем, что полная работа за период T выражается формулой

$$A=\left(-\frac{Xv_0^2}{8}T+\frac{Y}{\omega}\frac{v_0^2}{2}\right)+\left(-\frac{Xv_0^2}{8}T-\frac{Y}{\omega}\frac{v_0^2}{2}\right)+$$
$$+\left(-\frac{Xv_0^2}{8}T+\frac{Y}{\omega}\frac{v_0^2}{2}\right)+\left(-\frac{Xv_0^2}{8}T-\frac{Y}{\omega}\frac{v_0^2}{2}\right), \qquad (I.2.9')$$

а средняя мощность A/T равна

$$\langle W^T\rangle=-\frac{Xv_0^2}{2}.$$

Этот результат показывает, что средняя мощность излучателя зависит только от действительной части комплексного импеданса z и определяется косинусной составляющей силы реакции поля:

$$\langle W^T\rangle=-\frac{R_1v_0}{2},$$

где $R_1=\oint\limits_f p_m\,\mathbf{D}_n\cos\varphi\,df$.

Эта мощность непрерывно расходуется, образуя полный поток мощности акустических волн. Иначе говоря, поток мощности волн равен

$$\mathcal{P}_A=\frac{Xv_0^2}{2}=\frac{R_1v_0}{2}. \qquad (I.2.10)$$

Знакопеременные слагаемые в формуле (I.2.9′) соответствуют работе излучателя против синусной составляющей силы реакции поля

$$R_2=\oint p_m\,\mathbf{D}_n\sin\varphi\,df=v_0Y$$

и выражаются формулами вида

$$\pm\frac{Y}{\omega}\frac{v_0^2}{2}=\pm\frac{R_2v_0}{2} \qquad (I.2.11)$$

и составляют кинетическую энергию присоединенной массы жидкости $M=Y/\omega$:

$$\frac{Y}{\omega}\frac{v_0^2}{2}=\frac{Mv_0^2}{2}. \qquad (I.2.12)$$

Перемена знака в формуле (I.2.11) указывает на то, что через каждые четверть периода происходит попеременно накопление кинетической энергии присоединенной массы жидкости и возвращение этой энергии снова источнику движения поверхности излучателя.

Присоединенная масса может быть представлена посредством синусной составляющей силы реакции поля:

$$M=\frac{Y}{\omega}=\frac{1}{\omega v_0}R_2=\frac{1}{\dot v_0}R_2, \qquad (I.2.13)$$

где $R_2=\oint p_m\,\mathbf{D}_n\sin\varphi\,df$ — синусная составляющая силы реакции поля; $\dot v_0$ — амплитуда ускорения точки приведения.

Эта формула показывает, что под действием силы реакции R_2 поля масса M в процессе колебаний получает ускорение, амплитуда которого $\dot v_0=\omega v_0=R_2/M$.

Используя формулу (I.2.13), запишем механический импеданс излучателя в виде

$$z = X + j\omega M. \qquad (I.2.14)$$

Сравнивая выражение для механического импеданса (I.2.14) с импедансом цепи переменного тока

$$Z = R + j\omega L,$$

можно еще раз подтвердить прямую аналогию между электрическими и механическими (акустическими) процессами в цепях переменного тока. Следуя этой аналогии, излучение можно представить в виде электромеханической цепи акустического излучателя, состоящей из комплексной силы F реакции поля, массы индуктивного сопротивления $j\omega M$, активного сопротивления излучения X (v_m — амплитуда колебательной скорости на поверхности излучателя; рис. I.2.2).

Предельный коэффициент эффективности акустического излучения. В цепях переменного тока с последовательным соединением мощность, расходуемая источником э. д. с., идет на нагревание активного сопротивления. Индуктивная нагрузка накапливает энергию в форме энергии магнитного поля и периодически обменивается ею с источником напряжения. Аналогичный процесс осуществляется и в поле при излучении акустических волн: мощность источника энергии излучателя поглощается в виде потока энергии акустических волн или поглощается активной частью механического импеданса. Кроме того, в процессе работы излучателя вблизи него возникает присоединенная масса жидкости M, которая накапливает кинетическую энергию, периодически обменивается ею с источником движения преобразователя и таким образом удерживается вблизи преобразователя.

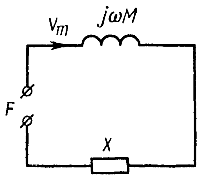

Рис. I.2.2

Согласно (I.2.10), полную мощность акустического поля выражают формулой

$$\mathscr{P}_{\text{п}} = Xv_0^2/2. \qquad (I.2.15)$$

Работа преобразователя за время $T/4$ есть

$$\mathscr{P}_{\text{а}} T/4 = (Y/\omega)(v_0^2/2).$$

Работа, производимая за это же время синусной составляющей реакции поля, равна $(Y/\omega)(v_0^2/2)$, а работа, производимая за это время косинусной составляющей, может быть представлена в виде

$$\mathscr{P}_{\text{п}} \frac{T}{4} = \frac{\pi X v_0^2}{4\omega}.$$

Назовем *предельным коэффициентом излучения* отношение работы преобразователя за время $T/4$, возникающей за счет действия косинусной составляющей реакции поля, к полной работе преобразователя за то же время. Тогда выражение для предельного коэффициента излучения будет

$$\eta=\frac{1}{1+Y/(\pi X)}. \qquad (I.2.16)$$

С увеличением частоты отношение Y/X стремится к нулю, а предельный коэффициент излучения — к единице.

Собственная частота нагруженного излучателя. Собственная частота преобразователя, рассчитанная без учета нагрузки, всегда понижается с увеличением реакции среды. Понижение частоты происходит за счет активного сопротивления и влияния присоединенной массы. Учет влияния нагрузки на собственную частоту преобразователя нетрудно произвести для низких частот, когда преобразователь можно представить как колебательную систему с сосредоточенными параметрами. Пусть $m_э$ и $c_э$ — эквивалентные масса и гибкость преобразователя, а M — его присоединенная масса. Тогда резонансная частота ненагруженного преобразователя

$$\omega=\sqrt{\frac{1}{(m_э+M)\,c_э}}=\alpha\omega_0, \qquad (I.2.17)$$

где $\omega_0=\frac{1}{\sqrt{m_э c_э}}$ — резонансная частота преобразователя без учета присоединенной массы; $\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+M/m_э}}$ — поправочный коэффициент, учитывающий присоединенную массу.

Для преобразователя, нагруженного на активное сопротивление X, собственную частоту определяют формулой для частоты свободных затухающих колебаний

$$\omega_n=\sqrt{\omega^2-\delta^2},$$

где $\delta=\frac{X}{2(m_э+M)}$ — коэффициент затухания; ω — резонансная частота преобразователя с учетом присоединенной массы.

Выполняя простые преобразования, получаем

$$\omega_n=\beta\omega_0, \quad \beta=\alpha\sqrt{1-\left(\frac{X\alpha}{2m_э\omega_0}\right)^2}, \quad \alpha=\frac{1}{1+M/m_э}. \qquad (I.2.18)$$

При высоких частотах $M/m_э \ll 1$ коэффициент α равен единице, тогда (I.2.18) преобразуется к формуле собственной частоты затухающих колебаний ненагруженного излучателя.

Характеристики направленности излучателя. Важное значение в гидроакустике имеет понятие направленности излучения акустических волн. Излучатели с резко выраженной направленностью позволяют увеличить дальность действия акустических волн без дополнительного увеличения мощности.

В различных направлениях от излучателя величины, которые характеризуют звуковое поле в точках, взятых на одинаковых расстояниях, будут различными. Обозначим звуковое давление в точке на расстоянии r с полярным углом θ через $p_\theta e^{j\varphi_\theta}$, а давление на оси излучателя на том же расстоянии r — через $p_\theta e^{j\varphi_\theta}$. Тогда согласно определению полную характеристику направленности по давлению выражают формулой

$$\Phi(\theta) = \frac{p_\theta}{p_0} e^{i(\varphi_\theta - \varphi_0)}. \tag{I.2.19}$$

Отношение амплитуд давления p_θ/p_0 называют *амплитудной характеристикой направленности*, а разность фаз давлений $(\varphi_\theta - \varphi_0)$ — *фазовой характеристикой*.

Иногда пользуются характеристикой направленности по интенсивности

$$\Phi_{\mathscr{I}}(\theta) = \mathscr{I}_\theta / \mathscr{I}_0,$$

где $\mathscr{I}_\theta$ и $\mathscr{I}_0$ — интенсивности на расстоянии r под углом θ и на оси.

Между характеристикой направленности по интенсивности и амплитудной характеристикой направленности по давлению существует связь:

$$\Phi_{\mathscr{I}}(\theta) = \Phi^2(\theta). \tag{I.2.20}$$

Коэффициент осевой концентрации. Для оценки энергетической эффективности направленного акустического излучателя в технической акустике широко используют коэффициент осевой концентрации излучателя — отношение интенсивности в некоторой точке звукового поля, расположенной на оси этого излучателя, к интенсивности ненаправленного излучателя в точке, находящейся на том же расстоянии, когда мощности этих излучателей одинаковы:

$$K = \frac{\mathscr{I}(r, 0)}{\mathscr{P}_a/(4\pi r^2)}, \tag{I.2.21}$$

где $\mathscr{I}(r, 0)$ — интенсивность направленного излучателя, мощность которого $\mathscr{P}_a$; $\mathscr{P}_a/(4\pi r^2)$ — интенсивность ненаправленного преобразователя.

Выразим акустическую мощность $\mathscr{P}_a$ через интенсивность ненаправленного преобразователя $\mathscr{I}(r, 0)$:

$$\mathscr{P}_a = \oint_f \mathscr{I}(r, 0)\, \Phi^2(\theta)\, ds = \mathscr{I}(r, 0) \oint_f \Phi^2(\theta)\, df. \tag{I.2.22}$$

Подставляя (I.2.22) в (I.2.21), получаем

$$K = \frac{4\pi r^2}{\oint_f \Phi^2(\theta)\, dt}. \tag{I.2.23}$$

Если звуковое поле имеет осевую симметрию, то элемент поверхности можно взять в виде круговой полосы, расположенной на поверхности сферы (рис. I.2.3). Элемент площади $dS = 2\pi r^2 \sin\theta\, d\theta$; площадь поверхности сферы $S(r) = 4\pi r^2$. Учитывая (I.2.23), получим

$$K = \frac{2}{\int_0^\pi \Phi^2(\theta) \sin\theta\, d\theta}. \tag{I.2.24}$$

Иногда коэффициент осевой концентрации называют *коэффициентом направленности* [2]. Этот параметр определяется, как отношение квадрата звукового давления в свободном поле, измеренного в точке на главной оси преобразователя, к среднему квадрату давления на поверхности, проходящей через выбранную точку сферы, в центре которой находится излучатель.

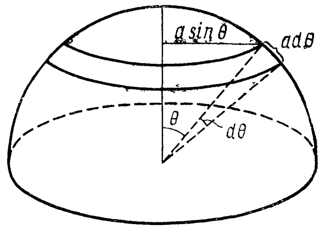

Рис. I.2.3

Расчет акустического импеданса, фактора направленности и коэффициента осевой концентрации излучателей, применяемых на практике, большей частью может быть проведен по приближенным формулам. Однако имеется несколько типов излучателей, для которых задача о нахождении их характеристик решается вполне строго. К ним относятся пульсирующие сферические источники.

В заключение приводим формулы основных характеристик излучателей:

1. Импеданс излучателя

$$z = \frac{1}{v_0} \oint p_m \mathbf{D}_n e^{j\varphi}\, df = X + jY.$$

2. Активное и реактивное механические сопротивления излучателя:

$$X = \frac{1}{v_0} \oint p_m \mathbf{D}_n \cos\varphi\, df;$$

$$Y = \frac{1}{v_0} \oint p_m \mathbf{D}_n \sin\varphi\, df.$$

3. Присоединенная масса излучателя

$$M = \frac{Y}{\omega} = \frac{1}{\omega v_0} \oint p_m \mathbf{D}_n \sin\varphi\, df.$$

4. Предельный коэффициент излучения

$$\eta = \frac{1}{1 + Y/\pi X}.$$

5. Коэффициент поправки резонансной частоты с учетом присоединенной массы и реакции излучения

$$\beta = \alpha \sqrt{1 - \left(\frac{X\alpha}{2m_э\omega_0}\right)^2}, \quad \alpha = \frac{1}{1 + M/m_э}.$$

6. Собственная частота нагруженного преобразователя

$$\omega_n = \beta\omega_0.$$

7. Полная характеристика направленности

$$\Phi = \frac{p(\theta)}{p(0)} e^{j[\varphi(\theta) - \varphi(0)]},$$

амплитудная характеристика

$$\Phi_p = p(\theta)/p(0),$$

фазовая характеристика

$$\alpha(\theta) = \varphi(\theta) - \varphi(0),$$

характеристика направленности по интенсивности

$$\Phi_{\mathscr{I}}(\theta) = \frac{\mathscr{I}(\theta)}{\mathscr{I}(0)} = \Phi_p^2(\theta).$$

8. Коэффициент направленности, или коэффициент осевой концентрации энергии,

$$\mathrm{K} = \frac{\mathscr{I}(r,\ 0)}{\mathscr{I}_{\text{ш}}(r)} = \frac{2}{\int\limits_0^{\pi} \Phi^2(\theta) \sin\theta \, d\theta}.$$

§ I.3. ПУЛЬСИРУЮЩАЯ СФЕРА

Пульсирующей сферой называют шаровой излучатель, все точки которого колеблются по закону

$$v_n(t) = v_0 e^{j\omega t},$$

где $v_n(t)$ — скорость колебания точек по нормали; $\omega = 2\pi f$ — циклическая частота.

Звуковое поле вокруг сферы определяют волновым уравнением в сферических координатах. Так как для пульсирующей сферы скорость поверхности не зависит от угловых координат, то это уравнение имеет вид

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial \Psi}{\partial r}\right) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} \tag{I.3.1}$$

при граничном условии

$$v_n = \left.\frac{\partial \Psi}{\partial r}\right|_{r=a} = v_0 e^{j\omega t}. \tag{I.3.2}$$

Как известно [3], частное решение уравнения (I.3.1) имеет вид

$$\Psi = \frac{1}{r}\left(A e^{-j\frac{\omega}{c}r} + B e^{j\frac{\omega}{c}r}\right) e^{j\omega t}.$$

Радиальная составляющая скорости частиц и звуковое давление выражаются формулами

$$\begin{gathered} v = -\frac{\partial \Psi}{\partial r} = \frac{1}{r^2}\left\{[A(1+jkr)] e^{j(\omega t - kr)} + B(1 - jkr) e^{j(\omega t + kr)}\right\}, \\ p = \frac{j\omega\rho}{r}\left(A e^{-jkr} + B e^{jkr}\right) e^{j\omega t}. \end{gathered} \tag{I.3.3}$$

Из условий излучения следует, что $B = 0$, а из краевого условия (I.3.2) получаем выражение для A:

$$A = \frac{v_0 a^2}{1 + jka}.$$